Глава 1

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Мы будем использовать обычные обозначения для операций над множествами. Если A и B — произвольные множества, то $A \cup B$ — *объединение* этих множеств, $A \cap B$ — их *пересечение*, $A \setminus B$ — их *разность*, и $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ — их *симметрическая разность*, $A \times B$ — их *декартово произведение*, т. е. множество всех пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. *Декартовым произведением* n множеств называется множество наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_j \in A_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Если множества A и B не пересекаются, то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $A \sqcup B$.

Для конечной или бесконечной последовательности множеств используются обозначения: $\bigcup\limits_k A_k$ для объединения, $\bigsqcup\limits_k A_k$ для дизъюнктного объединения (объединения попарно непересекающихся множеств), $\bigcap\limits_k A_k$ для пересечения множеств, а также $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} A_k$ для декартова произведения n множеств.

Верхним пределом последовательности множеств $\{A_n\}$ называется множество $\limsup A_n$, состоящее из точек, принадлежащих бесконечному числу различных множеств $\{A_{n_k}\}$.

Нижним пределом последовательности множеств $\{A_n\}$ называется множество $\liminf A_n$, состоящее из точек, принадлежащих всем множествам $\{A_n\}$, кроме, быть может, конечного числа.

ЗАДАЧИ

Пусть A, B, C и D — произвольные множества. Доказать следующие равенства (1.1–1.21).

1.1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

1.2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.3. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

1.4. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

1.5. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

1.6. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

1.7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

1.8. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.9. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

1.10. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.11. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.

1.12. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1.13. $A \triangle (A \triangle B) = B$.

1.14. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

1.15. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

1.16. $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

1.17. $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.

1.18. $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$.

1.19. $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$.

1.20. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

1.21. $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$.

Доказать следующие вложения (1.22–1.31). Построить примеры, показывающие, что обратные вложения, вообще говоря, неверны.

1.22. $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

1.23. $A \cup (B \triangle C) \supseteq (A \cup B) \triangle (A \cup C)$.

1.24. $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

1.25. $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

1.26. $A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$.

1.27. $A \triangle (B \cup C) \subseteq (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$.

1.28. $A \triangle (B \cap C) \supseteq (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$.

1.29. $A \triangle (B \setminus C) \supseteq (A \triangle B) \setminus (A \triangle C)$.

1.30. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

1.31. $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subseteq (A \times B) \setminus (C \times D)$.

Пусть A — некоторое множество и $\{B_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — некоторая система множеств. Доказать следующие равенства (1.32–1.34).

1.32.

$$A \bigcap \Bigl(\bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \Bigr) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (A \cap B_\omega).$$

1.33.

$$A \bigcup \Bigl(\bigcap_{\omega \in \Omega} B_\omega \Bigr) = \bigcap_{\omega \in \Omega} (A \cup B_\omega).$$

1.34.
$$A \setminus \left(\bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) = \bigcap_{\omega \in \Omega} (A \setminus B_\omega).$$

Пусть даны множества A, B и C. Выразить следующие множества через A, B и C при помощи операций $\cup$, $\cap$, $\setminus$ и $\triangle$ (1.35–1.42).

1.35. Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам.

1.36. Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств A, B и C.

1.37. Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C.

1.38. Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B и C.

1.39. Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C.

1.40. Множество элементов, принадлежащих A, B, но не принадлежащих C.

1.41. Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B, но не принадлежащих C.

1.42. Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B, но не принадлежащих C.

1.43. Выразить множество $\limsup A_n$ через множества A_n с помощью операций $\cup$ и $\cap$.

1.44. Выразить множество $\liminf A_n$ через множества A_n с помощью операций $\cup$ и $\cap$.

РЕШЕНИЯ

1.1. $x \in (A \cup B) \cap C \iff \{x \in A$ или $x \in B\}$ и $x \in C \iff \{x \in A$ и $x \in C\}$ или $\{x \in B$ и $x \in C\} \iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $\square$

1.2. $x \in (A \cap B) \cup C \iff \{x \in A$ и $x \in B\}$ или $x \in C \iff \{x \in A$ или $x \in C\}$ и $\{x \in B$ или $x \in C\} \iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. $\square$

1.3. $x \in A \cap B \iff x \in A$ и $x \in B \iff x \in A$ и $x \notin A \setminus B \iff$ $\iff x \in A \setminus (A \setminus B)$. $\square$

1.4. $x \in A \setminus (B \setminus C) \iff x \in A$ и $x \notin B \setminus C \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in A$ и $x \in C\} \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. $\square$

1.5. $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff x \in A \setminus B$ и $x \notin C \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ и $x \notin C \iff x \in A \setminus (B \cup C)$. $\square$

1.6. $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff x \in A \setminus B$ и $x \notin C \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ и $x \notin C \iff \{x \in A$ и $x \notin C\}$ и $x \notin B \iff \{x \in A$ и $x \notin C\}$ и $x \notin (B \setminus C) \iff x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. $\square$

1.7. $x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A$ и $x \notin B \cup C \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ и $\{x \in A$ и $x \notin C\} \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. $\square$

1.8. $x \in A \setminus (B \cap C) \iff x \in A$ и $x \notin B \cap C \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in A$ и $x \notin C\} \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\square$

1.9. $x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in A \cup B$ и $x \notin C \iff \{x \in A$ и $x \notin C\}$ или $\{x \in B$ и $x \notin C\} \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. $\square$

1.10. $x \in (A \cap B) \setminus C \iff x \in A \cap B$ и $x \notin C \iff \{x \in A$ и $x \notin C\}$ и $\{x \in B$ и $x \notin C\} \iff x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$. $\square$

1.11. $x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus D) \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ и $\{x \in C$ и $x \notin D\} \iff \{x \in A$ и $x \in C\}$ и $\{x \notin B$ и $x \notin D\} \iff x \in (A \cap C) \setminus (B \cup D)$. $\square$

1.12. $x \in A \triangle B \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in B$ и $x \notin A\} \iff \{x \in A$ или $x \in B\}$ и $x \notin A \cap B \iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. $\square$

1.13. $x \in A \triangle (A \triangle B) \iff \{x \in A$ и $x \notin A \triangle B\}$ или $\{x \in A \triangle B$ и $x \notin A\} \iff \{x \in A$ и $x \in B\}$ или $\{x \in B$ и $x \notin A\} \iff x \in B$. $\square$

1.14. $x \in (A \triangle B) \triangle C \iff \{x \in A \triangle B$ и $x \notin C\}$ или $\{x \in C$ и $x \notin A \triangle B\} \iff \{x \in A$ и $\{x \notin B$ и $x \notin C\}\}$ или $\{x \in B$ и $\{x \notin A$ и $x \notin C\}\}$ или $\{x \in C$ и $\{x \notin A$ и $x \notin B\}\}$ или $\{x \in C$ и $\{x \in A$ и $x \in B\}\} \iff \{x \in A$ и $x \notin B \triangle C\}$ или $\{x \in B \triangle C$ и $x \notin A\} \iff x \in A \triangle (B \triangle C)$. $\square$

1.15. $x \in (A \setminus B) \cap C \iff x \in A \setminus B$ и $x \in C \iff \{x \in A$ и $x \notin B\}$ и $x \in C \iff \{x \in A$ и $x \in C\}$ и $x \notin B \cap C\} \iff x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$. $\square$

1.16. $x \in (A \triangle B) \cap C \iff x \in A \triangle B$ и $x \in C \iff \{\{x \in A$ и $x \in C\}$ и $x \notin B\}$ или $\{\{x \in B$ и $x \in C\}$ и $x \notin A\} \iff \{x \in A \cap C$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in B \cap C$ и $x \notin A\} \iff \{x \in A \cap C$ и $x \notin B \cap C\}$ или $\{x \in B \cap C$ и $x \notin A \cap C\} \iff x \in (A \cap C) \triangle (B \cap C)$. $\square$

1.17. $x \in (A \triangle B) \setminus C \iff x \in A \triangle B$ и $x \notin C \iff \{\{x \in A$ и $x \notin B\}$ и $x \notin C\}$ или $\{\{x \in B$ и $x \notin A\}$ и $x \notin C\} \iff \{\{x \in A$ и $x \notin C\}$ и $x \notin B\}$ или $\{\{x \in B$ и $x \notin A\}$ и $x \notin C\} \iff \{x \in A \setminus C$ и $x \notin B\}$ или $\{x \in B \setminus C$ и $x \notin A\} \iff \{x \in A \setminus C$ и $x \notin B \setminus C\}$ или $\{x \in B \setminus C$ и $x \notin A \setminus C\} \iff x \in (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$. $\square$

1.18. $(x, y) \in (A \cup C) \times B \iff \{x \in A$ или $x \in C\}$ и $y \in B \iff \{x \in A$ и $y \in B\}$ или $\{x \in C$ и $y \in B\} \iff (x, y) \in (A \times B) \cup (C \times B)$. $\square$

1.19. $(x, y) \in (A \cap C) \times B \iff \{x \in A$ и $x \in C\}$ и $y \in B \iff \{x \in A$ и $y \in B\}$ и $\{x \in C$ и $y \in B\} \iff (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times B)$. $\square$

1.20. $(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \iff \{x \in A$ и $y \in B\}$ и $\{x \in C$ и $y \in D\} \iff \{x \in A$ и $x \in C\}$ и $\{y \in B$ и $y \in D\} \iff (x,y) \in (A \cap \cap C) \times (B \cap D)$. $\square$

1.21. $(x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \iff \{x \in A$ или $x \in C\}$ и $\{y \in B$ или $y \in D\} \iff \{x \in A$ и $y \in B\}$ или $\{x \in A$ и $y \in D\}$ или $\{x \in C$ и $y \in B\}$ или $\{x \in C$ и $y \in D\}$ или $\iff (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times D) \cup \cup (C \times B) \cup (C \times D)$. $\square$

1.22. Заметим, что $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C)$. Но если, например, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, то $A \cup (B \setminus C) = \{1,2\} \neq \neq \{2\} = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$. $\square$

1.23. Заметим, что $(A \cup B) \triangle (A \cup C) \subseteq B \triangle C \subseteq A \cup (B \triangle C)$. Если, например, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$, то $A \cup (B \triangle C) = \{1,2,3\} \neq \neq \{2,3\} = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$. $\square$

1.24. Вложение вытекает из задачи 1.7. Если, например, $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, то $A \setminus (B \cup C) = \varnothing \neq \{1,2\} = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\square$

1.25. Вложение вытекает из задачи 1.8. Если, например, $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, то $A \setminus (B \cap C) = \{1,2\} \neq \varnothing = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. $\square$

1.26. Вложение вытекает из задачи 1.4. Если $A = B = C$ — непустое множество, то $A = A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = \varnothing$. $\square$

1.27. $x \in A \triangle (B \cup C) \iff \{x \in A$ и $x \notin B \cup C\}$ или $\{x \notin A$ и $x \in B \cup C\} \Longrightarrow \{x \in A$ и $x \notin B\}$ или $\{x \notin A$ и $x \in B\}$ или $\{x \in A$ и $x \notin C\}$ или $\{x \notin A$ и $x \in C\} \iff x \in (A \triangle B)$ или $x \in (A \triangle C) \iff \iff x \in (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$. Если, например, $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, то $A \triangle (B \cup C) = \varnothing \neq \{1,2\} = (A \triangle B) \cup (A \triangle C)$. $\square$

1.28. $x \in (A \triangle B) \cap (A \triangle C) \iff x \in A \triangle B$ и $x \in A \triangle C \iff \iff \{x \in A$ и $x \notin B$ и $x \notin C\}$ или $\{x \notin A$ и $x \in B$ и $x \in C\} \Longrightarrow x \in A \triangle (B \cap C)$. Если, например, $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, то $A \triangle (B \cap C) = \{1,2\} \neq \varnothing = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$. $\square$

1.29. $x \in (A \triangle B) \setminus (A \triangle C) \iff x \in A \triangle B$ и $x \notin A \triangle C \iff \iff \{x \in A$ и $x \notin B$ и $x \in C\}$ или $\{x \notin A$ и $x \in B$ и $x \notin C\} \Longrightarrow x \in A \triangle (B \setminus C)$. Пусть $A = B = C$ — произвольное непустое множество. Тогда $\varnothing = (A \triangle B) \setminus (A \triangle C) \neq A \triangle (B \setminus C) = = A \triangle \varnothing = A$. $\square$

1.30. Вложение непосредственно вытекает из задачи 1.21. При этом нетрудно видеть, что если A не пересекается с C, а B — с D и все четыре множества не пусты, то непустое множество $A \times D$ содержится в $(A \cup C) \times (B \cup D)$, но не пересекается с $(A \times B) \cup (C \times D)$. $\square$

1.31. $(x,y) \in (A \setminus C) \times (B \setminus D) \iff \{x \in A$ и $x \notin C\}$ и $\{y \in B$ и $y \notin D\} \iff \iff \{x \in A$ и $y \in B\}$ и $\{x \notin C$ и $y \notin D\} \Rightarrow \{(x,y) \in \in A \times B\}$ и $\{(x,y) \notin C \times D\} \iff (x,y) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$. Если, например, $A = B = \{1, 2\}$, $C = D = \{1\}$, то $(A \setminus C) \times (B \setminus D) = \{(2, 2)\} \neq$ $\neq \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\} = (A \times B) \setminus (C \times D)$. $\square$

1.32. $x \in A \bigcap \left(\bigcup\limits_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) \Longleftrightarrow x \in A$ и существует такое $\omega \in \Omega$, что $x \in B_\omega \Longleftrightarrow$ существует такое $\omega \in \Omega$, что $x \in A \cap B_\omega \Longleftrightarrow x \in$ $\in \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} (A \cap B_\omega)$. $\square$

1.33. $x \in A \bigcup \left(\bigcap\limits_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) \Longleftrightarrow x \in A$ или для любого $\omega \in \Omega$ $x \in B_\omega \Longleftrightarrow$ для любого $\omega \in \Omega$ $x \in A \cup B_\omega \Longleftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\omega \in \Omega} (A \cup B_\omega)$. $\square$

1.34. $x \in A \setminus \left(\bigcup\limits_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) \Longleftrightarrow x \in A$ и для любого $\omega \in$ $\in \Omega$ $x \notin B_\omega \Longleftrightarrow$ для любого $\omega \in \Omega$ $x \in A \setminus B_\omega \Longleftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\omega \in \Omega} (A \setminus B_\omega)$. $\square$

Задачи 1.35–1.39 могут быть решены по-разному. Мы приведём только ответы, которые, как и ответы к задачам 1.40–1.42, можно проверить непосредственно.

1.35. $(A \cap B) \cap C$.

1.36. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

1.37. $((A \cup B) \cup C) \setminus ((A \triangle B) \triangle C)$.

1.38. $(A \cup B) \cup C$.

1.39. $((A \triangle B) \triangle C) \setminus ((A \cap B) \cap C)$.

1.40. $(A \cap B) \setminus C$.

1.41. $(A \cup B) \setminus C$.

1.42. $(A \triangle B) \setminus C$.

1.43. Формализуя определение верхнего предела последовательности множеств, получаем

$$\limsup A_n = \{x : \ \forall\, n \ \ \exists\, m \geqslant n \quad x \in A_m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

$\square$

1.44. Формализуя определение нижнего предела последовательности множеств, получаем

$$\liminf A_n = \{x : \ \exists\, n \ \ \forall\, m \geqslant n \quad x \in A_m\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

$\square$