Глава 2

МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВ

Пусть A и B — два множества. Скажем, что A и B *имеют равные мощности* ($A \sim B$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие $A \longleftrightarrow B$. Ясно, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. В данной главе *эквивалентными* будут называться множества, имеющие равные мощности. Равенство мощностей записывают также формулой $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. Будем говорить, что *мощность A меньше или равна мощности B* ($\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$), если $A \sim B_1$ для некоторого множества $B_1 \subseteq B$. Естественным образом определяются обратное неравенство и строгие неравенства для мощностей.

Можно показать (см., например, [7], гл. 14), что существует шкала мощностей, т. е. такое линейно упорядоченное множество $\{\alpha\}$ так называемых порядковых чисел, что для любого множества A существует порядковое число $\alpha(A)$, для которого мощность A равна $\alpha(A)$. При этом если $A \subseteq B$, то $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$.

Если $A \sim \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, то A называется *счётным*. Если A конечно (в частности, пусто) или счётно, то говорят, что *A не более чем счётно* . Множество называется *несчётным*, если его мощность строго больше, чем мощность счётного множества.

Через $\mathbb{Q}$, как обычно, обозначается множество всех рациональных чисел на прямой $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Через $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ будет обозначаться множество всех рациональных чисел из отрезка $[0; 1]$. Запись $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет означать, что множество $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ занумеровано некоторым образом.

Если $A \sim [0, 1]$, то говорят, что множество *A имеет мощность континуума*, и пишут $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$ (см. также задачу 2.9).

Пусть A — множество на прямой, $c \in \mathbb{R}$. Через $A + c$ будем обозначать сдвиг множества A на число c, т. е. $\{x\colon x = a + c,\ \text{где } a \in A\}$. Для множества A на $[0; 1]$ через $A + c \pmod 1$ обозначим сдвиг множества A на число c по модулю 1, т. е. $\{x\colon x = a + c \pmod 1,\ \text{где } a \in A\}$.

Утверждение, что не существует мощности, большей, чем счётная, но меньшей, чем мощность континуума, называется континуум-гипотезой. Долгое время математики пытались доказать или опровергнуть её, пока не было доказано, что ни континуум-гипотеза, ни её отрицание не противоречат аксиоматике теории множеств. Использование континуум-гипотезы при решении задач не предполагается.

Другое важное утверждение — так называемая *аксиома выбора*: если дана система попарно непересекающихся множеств $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, то существует множество $B=\{a_\omega\}$, где $a_\omega\in A_\omega$ для каждого $\omega\in\Omega$, т. е. множество, содержащее по одному представителю множеств A_ω. Аксиома выбора в данной книге принимается безоговорочно.

Напомним, что функция на промежутке вещественной прямой называется возрастающей (неубывающей, убывающей, невозрастающей), если для любых точек x и y, где $x<y$, выполнено неравенство $f(x)<f(y)$ (соответственно, $f(x)\leqslant f(y)$, $f(x)>f(y)$, $f(x)\geqslant f(y)$).

Характеристической функцией (индикатором) множества E называется функция $\chi_E(x)$, равная 1 на E и 0 вне E (её область определения в каждом случае ясна из контекста).

ЗАДАЧИ

2.1. Пусть множества A_j, $j\in\mathbb{N}$, — не более чем счётные. Доказать, что множество
$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$$
не более чем счётно.

2.2. Доказать, что множество $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ счётно.

2.3. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счётно.

2.4. Доказать, что любая монотонная на $\mathbb{R}$ функция непрерывна всюду, кроме не более чем счётного множества, причём в точках этого множества существуют пределы функции слева и справа.

2.5. Пусть A и B — счётные множества. Доказать, что их декартово произведение счётно.

2.6. Пусть $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ — конечный набор счётных множеств. Доказать, что их декартово произведение счётно. В частности, $\mathbb{Q}^n$ счётно.

2.7. Число $a\in\mathbb{R}$ называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого уравнения вида
$$k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\ldots+k_1x+k_0=0$$
с целыми коэффициентами $k_n,\ldots,k_0$. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счётно.

2.8. Пусть множество A в пространстве $\mathbb{R}^n$ таково, что существует постоянная $C>0$: $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\geqslant C$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in A$. Доказать, что A не более чем счётно.

2.9. Доказать, что $[0, 1]$ — несчётное множество.

2.10. Доказать, что множества $[0, 1)$, $(0, 1]$, $(0, 1)$ имеют мощность континуума.

2.11. Доказать, что множества $\mathbb{R}$, $[0, \infty)$, $(0, \infty)$, $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 0]$ имеют мощность $\mathfrak{c}$.

2.12. Существует ли взаимно однозначное непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на полуинтервал $[0, 1)$?

2.13. Существует ли взаимно однозначное непрерывное отображение полуинтервала $[0, 1)$ на отрезок $[0, 1]$?

2.14. Доказать, что любой невырожденный промежуток на $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.

2.15. Пусть $A = [0, 1] \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Доказать, что A имеет мощность континуума.

2.16. Пусть A — бесконечное множество, B — не более чем счётное множество. Доказать, что $A \cup B \sim A$.

2.17. Пусть A — бесконечное множество. Доказать, что существует множество $B \subset A$, $B \neq A$, мощность которого равна мощности A.

2.18. Пусть A — множество последовательностей $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, где $a_j = 0$ или $a_j = 1$ для каждого j, которые не являются периодическими с периодом (1), т. е. не существует такого N, что $a_j = 1$ для всех $j > N$. Доказать, что A имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.19. Пусть B — множество последовательностей $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$, где $b_j = 0$ или $b_j = 1$ для каждого j. Доказать, что B имеет мощность континуума.

2.20. Пусть C — множество последовательностей $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, где n_j — натуральные числа. Доказать, что C имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.21. Пусть A — множество всех чисел из полуинтервала $[0, 1)$, в десятичном разложении которых нет цифры «8». Доказать, что A имеет мощность континуума.

2.22. Для интервала I через $\mu(I)$ будем обозначать его длину. Рассмотрим следующее построение. Пусть $J_1^0 = [0, 1]$. На первом шаге выбросим из отрезка J_1^0 такой интервал I_1^1 с тем же центром, что $\mu(I_1^1) = \frac{1}{3}\, \mu(J_1^0) = \frac{1}{3}$, т. е. $I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Обозначим оставшиеся отрезки через J_1^1 и J_2^1. Пусть после $n-1$ $(n > 1)$ шагов мы получили 2^{n-1} отрезков $J_1^{n-1}, \ldots, J_{2^{n-1}}^{n-1}$. Тогда на n-м шаге мы выкинем из каждого отрезка J_k^{n-1}, где $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$, такой интервал I_k^n с тем же центром, что $\mu(I_k^n) = \frac{1}{3}\, \mu(J_k^{n-1})$. Получим 2^n отрезков $J_1^n, \ldots, J_{2^n}^n$. Обозначим теперь

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n \quad \text{и} \quad P_0 = [0,1] \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^n} J_k^n.$$

Ясно, что G открыто, а P_0 замкнуто. Множество P_0 называется *канторовым замкнутым множеством*, а G — *канторовым открытым множеством*. Доказать, что P_0 имеет мощность континуума.

2.23. Пусть даны попарно непересекающиеся множества A_1, A_2,..., каждое из которых имеет мощность $\mathfrak{c}$. Доказать, что множество

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.24. Пусть $\{A_j\}_{j=1}^{n}$ — набор множеств мощности континуума. Доказать, что их декартово произведение имеет мощность континуума. В частности, $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума.

2.25. Пусть $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность множеств мощности $\mathfrak{c}$. Доказать, что множество последовательностей $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, где $a_j \in \in A_j$ при $j \in \mathbb{N}$, имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.26. Пусть $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — система попарно непересекающихся множеств, где множество индексов Ω имеет мощность $\mathfrak{c}$ и для каждого $\omega \in \Omega$ множество A_ω имеет мощность $\mathfrak{c}$. Доказать, что множество

$$A = \bigsqcup_{\omega\in\Omega} A_\omega$$

имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.27. Пусть A — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Доказать, что A счётно.

2.28. Пусть B — множество всех подмножеств $\mathbb{N}$. Доказать, что B имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.29. Назовём буквой «Г» фигуру на плоскости, состоящую из двух перпендикулярных отрезков произвольной длины, выходящих из одной точки (вершины буквы). Пусть A — некоторое множество попарно непересекающихся букв «Г» одинакового размера, расположенных на плоскости. Может ли это множество иметь мощность континуума?

2.30. Пусть A — непустое множество, а B — множество всех подмножеств A. Если A имеет мощность α, то через 2^α будем обозначать мощность B. Доказать, что $B \not\sim A$ и, как следствие, $\alpha < 2^\alpha$.

2.31. Пусть A_0, A_1 и A_2 — множества, причём $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$ и $A_2 \sim A_0$. Доказать, что $A_1 \sim A_0$.

2.32. Пусть A и B — такие множества, что $A \setminus B \sim B \setminus A$. Доказать, что $A \sim B$.

2.33. Пусть A, B и C — множества, причём $A \subseteq B$ и $A \sim A \cup C$. Доказать, что $B \sim B \cup C$.

2.34. Пусть A, B, C и D — множества, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, $C \cup B \sim C$. Доказать, что $A \cup D \sim A$.

2.35. Построить такие множества A, B, C и D, что $B \subseteq A$, $D \subseteq C$, $A \sim C$, $B \sim D$, но $A \setminus B \not\sim C \setminus D$.

2.36. Построить такие множества A, B и C, что $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, $A \sim B$, но $C \setminus A \not\sim C \setminus B$.

2.37. Построить множества A, B и C, для которых $C \subseteq A$, $C \subseteq B$, $A \sim B$, но $A \setminus C \not\sim B \setminus C$.

2.38. Пусть $A \subset [0, 1]$ — счётное множество. Доказать, что при некотором $a \in [0, 1]$ выполнено условие $A \cap A + a \pmod 1 = \varnothing$.

2.39. Построить такие множества $A \in [0, 1]$ и $B \in [0, 1]$ мощности континуума, что для любых различных точек $b(1), b(2) \in B$ выполнено условие $A + b(1) \cap A + b(2) = \varnothing$.

2.40. Теорема Кантора–Бернштейна. Доказать, что если A и B — множества, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, $A \sim B_1$ и $B \sim A_1$, то $A \sim B$. Другими словами, если $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

З а м е ч а н и е. В силу теоремы Кантора–Бернштейна в задаче 2.23 можно отбросить условие пустоты попарных пересечений множеств.

2.41. Пусть $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — система множеств, причём Ω имеет мощность $\mathfrak{c}$ и для каждого $\omega \in \Omega$ множество A_ω имеет мощность $\mathfrak{c}$. Доказать, что множество

$$A = \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega$$

имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.42. Пусть $C([0, 1])$ — множество всех непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что $C([0, 1])$ имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.43. Пусть A — множество всех монотонных функций на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что A имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.44. Пусть A — множество всех последовательностей непрерывных функций на $[0, 1]$. Доказать, что A имеет мощность континуума.

2.45. Пусть A — множество всех вещественнозначных функций на $[0, 1]$. Доказать, что A имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$ (см. обозначение в задаче 2.30).

2.46. Доказать, что на отрезке $[0, 1]$ существует вещественнозначная функция $f(x)$, которая не может быть представлена как предел всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

З а м е ч а н и е. Такая функция будет построена в явном виде в задаче 4.36.

2.47. Пусть множество A имеет мощность $\mathfrak{c}$ и $A = B \cup C$. Доказать, что по крайней мере одно из множеств B, C имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.48. Пусть множество A представлено в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

и A имеет мощность $\mathfrak{c}$. Доказать, что хотя бы для одного n_0 множество A_{n_0} имеет мощность $\mathfrak{c}$.

2.49. Можно ли расположить на плоскости континуум попарно непересекающихся букв «O» (окружностей)?

2.50. Можно ли расположить на плоскости несчётное множество попарно непересекающихся букв «O» (окружностей) так, чтобы ни одна из них не лежала внутри другой?

2.51. Назовём буквой «A» на плоскости фигуру, состоящую из двух боковых сторон равностороннего треугольника и произвольного невырожденного отрезка, соединяющего эти стороны и параллельного основанию, но не совпадающего с ним. Пусть F — некоторое множество попарно непересекающихся букв «A» (вообще говоря, разного размера) на плоскости. Доказать, что F не более чем счётно.

2.52. Назовём буквой «T» на плоскости фигуру, состоящую из двух перпендикулярных отрезков произвольного размера, середина первого из которых является одним из концов второго. Пусть F — некоторое множество попарно непересекающихся букв «T» (вообще говоря, разного размера) на плоскости. Доказать, что F не более чем счётно.

2.53. Пусть $f(x)$ — функция на $(0, 1)$, и для любого $x \in (0, 1)$ существует такое $\delta = \delta(x) > 0$, что $f(x) \geqslant f(t)$ для любого $t \in (x - \delta, x + \delta)$ (т. е. каждая точка интервала $(0, 1)$ является точкой нестрогого локального максимума функции f). Доказать, что множество значений функции $f(x)$ не более чем счётно.

2.54. Построить функцию $f(x)$, которая удовлетворяет условиям задачи 2.53 и имеет счётное множество значений.

РЕШЕНИЯ

2.1. Пусть $B_1 = A_1$ и

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$$

при $n = 2, 3, \ldots$ Ясно, что тогда все B_j не более чем счётны и

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Пусть $B_j = \{b_{j,i}\}_{i=1}^{i_j}$ при $j \in \mathbb{N}$, где i_j могут быть конечными или бесконечными. Занумеруем элементы множества A следующим образом. Пусть $a_1 = b_{1,1}$, $a_2 = b_{1,2}$, $a_3 = b_{2,1}$, $a_4 = b_{1,3}$, $a_5 = b_{2,2}$, $a_6 = b_{3,1}$ и т. д.: в порядке возрастания суммы индексов, а при фиксированной сумме индексов — в порядке возрастания первого. Если очередной элемент $b_{i,j}$ не существует, т. е. $i > i_j$, то мы его пропускаем. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между множествами A и $\mathbb{N}$ (или между A и некоторым конечным множеством, если $\sum\limits_j i_j < \infty$). $\square$

2.2. Пусть $A_n = \{\frac{m}{n}\colon\ m = 0, 1, \ldots, n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что A_n конечно для каждого n и

$$\mathbb{Q}_{[0;1]} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Так как множество $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ бесконечно, то в силу результата задачи 2.1 оно счётно. $\square$

2.3. Пусть Q_{2n} — множество всех рациональных чисел из $[n-1, n]$, а Q_{2n-1} — множество всех рациональных чисел из $[-n, -n+1]$, где $n \in \in \mathbb{N}$. Так как каждое множество Q_n, как нетрудно видеть, эквивалентно множеству $\mathbb{Q}_{[0;1]}$, то в силу результата задачи 2.2 каждое множество Q_n счётно, а тогда в силу результата задачи 2.1 счётно и множество

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

$\square$

2.4. Нетрудно видеть, что в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ для монотонной функции f существуют односторонние пределы $f(x-0) = \sup\limits_{t<x} f(t)$ и $f(x+0) = \inf\limits_{t>x} f(t)$. Рассмотрим множество точек, для которых $f(x+0) - f(x-0) > 0$. Каждой такой точке можно поставить в соответствие рациональное число $q \in (f(x-0), f(x+0))$. При этом в силу монотонности функции разным точкам разрыва будут соответствовать разные рациональные числа, так как если $x < y$, то $f(x+0) \leqslant f(y-0)$. В силу счётности множества $\mathbb{Q}$ (см. задачу 2.3) множество точек разрыва функции f не более чем счётно. $\square$

2.5. Пусть $C = A \times B$, $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$. Определим для $i \in \mathbb{N}$ множества $C_i = \{(a_i, b_j)\colon j \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что каждое множество C_i счётно, и что

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

поэтому в силу результата задачи 2.1 множество C тоже счётно. $\square$

2.6. Докажем это утверждение индукцией по числу множеств n. Для $n = 2$ утверждение доказано в задаче 2.5. Предположим, что мы доказали его для $n-1$ множества. Определим для $j \in \mathbb{N}$ множества

$$C_j = \{(a_{1,j}, b_2, \ldots, b_n),\ \text{где}\ b_k \in A_k\ \text{при}\ k = 2, \ldots, n\}.$$

Поскольку $C_j \sim A_2 \times \ldots \times A_n$, то по предположению индукции множество C_j счётно для каждого j. Так как

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,$$

то в силу результата задачи 2.1 множество A счётно. $\square$

2.7. Пусть A_n — множество всех алгебраических чисел, являющихся корнями уравнений с целыми коэффициентами, степень которых не превосходит n. Из задачи 2.6 следует, что множество таких уравнений счётно. Далее, по основной теореме алгебры количество различных корней такого уравнения не превосходит n. Поэтому A_n счётно. Так как

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то A тоже счётно. $\square$

2.8. Выберем для каждого элемента $\mathbf{x} \in A$ точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ так, чтобы $|\mathbf{x} - \mathbf{r}| < \dfrac{C}{2}$. Заметим, что если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, то $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{r}(\mathbf{y})$ согласно неравенству треугольника. Следовательно, множество A эквивалентно некоторому подмножеству $\{\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)\} \subseteq \mathbb{Q}^n$. В силу результата задачи 2.6 $\mathbb{Q}^n$ счётно. Поэтому A не более чем счётно. $\square$

2.9. Предположим, что утверждение неверно. Это означает, что все точки отрезка $[0,1]$ можно занумеровать, т. е. $[0,1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Выберем отрезок $I_1 = [a_1, b_1] \subset [0,1]$ так, чтобы $x_1 \notin I_1$. Затем выберем отрезок $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$ так, чтобы $x_2 \notin I_2$, и т. д. По индукции мы получим такую последовательность отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, что $x_n \notin I_n$. Согласно принципу вложенных отрезков существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Но тогда для любого n выполнено неравенство $x \neq x_n$, и мы приходим к противоречию. $\square$

2.10. Определим отображение

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\neq \dfrac{1}{n}, \text{ где } n\in\mathbb{N};\\ \dfrac{1}{n+1}, & \text{если } x=\dfrac{1}{n}, \text{ где } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Тогда $f(x)$ есть взаимно однозначное соответствие между $[0,1]$ и $[0,1)$. Остальные утверждения проверяются аналогично. □

2.11. Согласно задаче 2.10, множество $(0,1)$ имеет мощность $\mathfrak{c}$. Биекция $(0,1)\longleftrightarrow\mathbb{R}$ устанавливается отображением $f(x)=\operatorname{tg}(\pi x-\pi/2)$. Биекция $\mathbb{R}\longleftrightarrow(0,\infty)$ устанавливается отображением $f(x)=\ln x$. Биекция $[0,\infty)\longleftrightarrow(0,\infty)$ строится так же, как в задаче 2.10. Равенство мощностей остальных множеств проверяется аналогично. □

2.12. Предположим, что $f(x)$ есть непрерывное взаимно однозначное отображение отрезка $[0,1]$ на полуинтервал $[0,1)$. Тогда $1=\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. Так как $f(x)$ — непрерывная функция на $[0,1]$, то существует точка $x_0\in[0,1]$, в которой достигается точная верхняя грань функции, т. е. $f(x_0)=1$, что противоречит предположению. □

2.13. Предположим, что $f(x)$ есть непрерывное взаимно однозначное отображение полуинтервала $[0,1)$ на отрезок $[0,1]$, причём $f(a)=0$ и $f(b)=1$. Хотя бы одна из точек a и b не совпадает с нулём. Пусть $a\neq 0$. Тогда, поскольку непрерывная функция принимает на отрезке все промежуточные значения, то в произвольной левой окрестности точки a функция f принимает все значения из интервала $(0,\delta_1)$, а в правой — из интервала $(0,\delta_2)$. Таким образом, достаточно малые по модулю значения принимаются дважды, что противоречит взаимной однозначности f. □

2.14. Если данный промежуток — отрезок, то отображение $f(x)=a+(b-a)x$ является взаимно однозначным соответствием между $[0,1]$ и $[a,b]$. Остальные случаи разбираются аналогично с использованием задач 2.10 и 2.11. □

2.15. Определим отображение

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\neq \dfrac{1}{n\sqrt{2}}, \text{ где } n\in\mathbb{N};\\ \dfrac{1}{k}, & \text{если } x=\dfrac{1}{2k\sqrt{2}}, \text{ где } k\in\mathbb{N};\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,k}, & \text{если } x=\dfrac{1}{(2k-1)\sqrt{2}}, \text{ где } k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Тогда $f(x)$ есть взаимно однозначное соответствие между A и $[0,1]$. □

2.16. Так как множество A бесконечно, мы можем последовательно выбрать счётное множество $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq A$. Из задачи 2.1 следует, что $A_1 \sim A_1 \cup (B \setminus A)$. Обозначим это соответствие через $g(x)$. Определим теперь функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A \setminus A_1; \\ g(x), & \text{если } x \in A_1. \end{cases}$$

Тогда f есть биекция множества A на множество $A \cup B$. $\square$

2.17. Выберем счётное подмножество $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$, и пусть $C = A \setminus P$. Положим $P_1 = \{p_{2j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ и $P_2 = \{p_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$, $B = A \setminus P_2$. Тогда в силу результата задачи 2.1 выполнено условие $\overline{\overline{P}} = \overline{\overline{P_1}}$, откуда следует, что $B \sim (C \sqcup P_1) \sim (C \sqcup P) \sim A$. $\square$

2.18. Пусть $x \in [0,1)$. Рассмотрим его разложение в двоичную дробь: $x = (x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$, где $x_j \in \{0,1\}$ для каждого j. Если $x \in B_2 = \{k/2^n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant k < 2^n\}$, то существуют два различных разложения x: $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0, 1, 1, \ldots)$ и $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots)$. Если $x \notin B_2$, то разложение единственно. Определим отображение

$$f(x) = \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots), & \text{если } x \notin B_2; \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}, 1, 0, 0, \ldots), & \text{если } x \in B_2. \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ есть взаимно однозначное соответствие между $[0,1)$ и A. Так как $[0,1)$ имеет мощность континуума (см. задачу 2.10), то и A имеет мощность континуума. $\square$

2.19. Пусть A — множество из задачи 2.18. Пусть $B_n = \{(x_1, x_2, \ldots)\colon\ x_j = 1$ при $j > n\}$ и

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Так как для каждого n множество B_n конечно, то множество C счётно. Заметим, что $B = A \cup C$. Тогда в силу результатов задач 2.16 и 2.18 множество A имеет мощность $\mathfrak{c}$. $\square$

2.20. Пусть $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m, \ldots)$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Определим последовательность нулей и единиц $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_m, \ldots) = f(\mathbf{n})$:

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{если } n_0 + n_1 + \ldots + n_{l-1} < j < n_0 + n_1 + \ldots + n_l \\ & \text{для некоторого } l \geqslant 1; \\ 0, & \text{если } j = n_0 + n_1 + \ldots + n_l \text{ для некоторого } l \geqslant 1, \end{cases}$$

где $n_0 = 0$, т. е. мы последовательно пишем $(n_l - 1)$ единиц и один нуль. Тогда f будет взаимно однозначным соответствием между C и множеством всех последовательностей из нулей и единиц, которые не заканчиваются единицей в периоде. В силу результата задачи 2.18 множество C имеет мощность континуума. $\square$

2.21. Заметим, что множество A эквивалентно множеству всех последовательностей $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$, где $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, которые не имеют 9 в периоде. Для каждой такой последовательности определим последовательность $\{b_j\}_{j=1}^{\infty})$: $b_j = a_j$ при $a_j \leqslant 7$ и $b_j = 8$, если $a_j = 9$. Получаем, что A эквивалентно множеству B последовательностей $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$, где $b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, которые не имеют 8 в периоде. Но множество таких последовательностей задаёт девятичные разложения всех чисел из полуинтервала $[0, 1)$, поэтому $B \sim [0, 1)$. $\square$

2.22. Если

$$[0, 1) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \quad \text{где } x_j \in \{0, 1, 2\} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n \neq 2\},$$

то множество G содержит только последовательности, для которых $x_{n_0} = 1$ при некотором n_0. Отсюда следует, что множество P_0 содержит все такие последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ с $x_j \in \{0, 2\}$, что $x_n \not\to 2$ при $n \to \infty$. Поэтому (см. задачу 2.18) множество P_0 имеет мощность континуума. $\square$

2.23. Пусть f_j — взаимно однозначное соответствие между множеством A_j и полуинтервалом $\left[1 - \dfrac{1}{j}, 1 - \dfrac{1}{j+1}\right)$ (см. задачу 2.14). Определим функцию $f : A \to [0, 1)$ равенствами $f(x) = f_j(x)$ при $x \in A_j$ для $j \in \mathbb{N}$. Тогда f есть биекция A на $[0, 1)$. $\square$

2.24. См. ниже решение задачи 2.25.

2.25. Можно считать (см. задачу 2.19), что каждое A_j есть множество последовательностей из 1 и 0, т. е. $a_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, \ldots, a_{j,i}, \ldots)$ для $j \in \mathbb{N}$, где $a_{j,i} \in \{0, 1\}$. Занумеруем $\{a_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$ в одну последовательность $(\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $b_1 = a_{1,1}$, $b_2 = a_{1,2}$, $b_3 = a_{2,1}$, $b_4 = a_{1,3}$, $b_5 = a_{2,2}$ и т. д., как в решении задачи 2.1. Тем самым мы построили взаимно однозначное соответствие между A и множеством всех последовательностей из 1 и 0. Теперь утверждение следует из задачи 2.19. $\square$

2.26. Пусть f — биекция Ω на $\mathbb{R}$, и для каждого $\omega \in \Omega$ пусть g_ω — биекция A_ω на $\mathbb{R}$. Определим на множестве A функцию F следующим образом: если $x \in A_\omega$, то $F(x) = (g_\omega(x), f(\omega))$. Тогда видно, что F — биекция A на $\mathbb{R}^2$. Так как $\mathbb{R}^2$ имеет мощность $\mathfrak{c}$ (см. задачу 2.24), то и A имеет мощность $\mathfrak{c}$. $\square$

2.27. Пусть A_n — множество всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Заметим, что A_n конечно для каждого n и что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

В силу результата задачи 2.1 множество A не более чем счётно, но A содержит все одноточечные подмножества $\mathbb{N}$ и потому бесконечно. $\square$

2.28. Определим отображение F множества B на множество D всех последовательностей из 1 и 0 следующим образом. Для произвольного $C \in B$ положим $F(C) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in C, \\ 0, & \text{если } n \in \mathbb{N} \setminus C. \end{cases}$$

Заметим, что F — взаимно однозначное соответствие. Так как D имеет мощность $\mathfrak{c}$, то и B имеет мощность $\mathfrak{c}$. $\square$

2.29. Да. Например, разместим их следующим образом. Каждому вещественному числу a поставим в соответствие букву «Г», вершина которой лежит в точке $(0, a)$, а стороны лежат на лучах $y = a + x$, $x \geqslant 0$, и $y = a - x$, $x \leqslant 0$, соответственно. $\square$

2.30. Предположим, что утверждение неверно, и f есть биекция A и B. Тогда $A = C \sqcup D$, где $C = \{x \in A \colon x \in f(x)\}$, а $D = \{x \in A \colon x \notin f(x)\} \in B$. Пусть $y = f^{-1}(D) \in A$. Если $y \in C$, то по определению множества C выполнено условие $y \in f(y) = D$, и мы получаем противоречие. Если же $y \in D$, то по определению множества D мы получаем, что $y \notin f(y) = D$, и вновь приходим к противоречию. Итак, $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$. Но множество A биективно отображается на множество своих одноточечных подмножеств, поэтому $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$. С учётом предыдущего неравенства это и означает, что $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. $\square$

2.31. Пусть f — взаимно однозначное соответствие между множествами A_0 и A_2, а $A_3 = f(A_1) \subseteq A_2$. Тогда $A_3 \sim A_1$. Далее, пусть $A_4 = f(A_2), \ldots, A_{2k+2} = f(A_{2k})$ и $A_{2k+1} = f(A_{2k-1})$ при всех $k \geqslant 1$. Получаем последовательность множеств

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots,$$

где $A_k \sim A_{k+2}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ Заметим, что по построению функция f задаёт при каждом $k \geqslant 0$ биекцию

$$A_k \setminus A_{k+1} \sim A_{k+2} \setminus A_{k+3}. \tag{i}$$

Если

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то мы получаем, что

$$A_0 = B \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}) \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \right) \equiv B \sqcup C_1 \sqcup C_2$$

и

$$A_1 = B \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}) \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \right) \equiv B \sqcup D_1 \sqcup D_2.$$

Заметим, что $C_2 = D_2$, и из условия (i) следует, что $C_1 \sim D_1$. Поэтому $A_0 \sim A_1$. $\square$

2.32. Этот результат немедленно следует из формул $A = (A \cap \cap B) \sqcup (A \setminus B)$ и $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$. $\square$

2.33. Пусть $D = B \setminus A$. Тогда $B = D \sqcup A$ и $B \cup C = D \sqcup (A \cup \cup (C \setminus B))$. Таким образом, утверждение будет доказано, если мы покажем, что $A \sim E = A \cup (C \setminus B)$. Но эквивалентность этих множеств устанавливается, если применить задачу 2.31 к множествам $A \subseteq E \subseteq A \cup C$, где $A \sim A \cup C$. $\square$

2.34. Так как $C \cup B \sim C$ и $D \setminus A \subseteq B$, то из задачи 2.31 следует, что $C \cup (D \setminus A) \sim C$. Далее,

$$A \cup D = (A \setminus C) \sqcup (C \cup (D \setminus A)) \sim (A \setminus C) \sqcup C = A.$$

$\square$

2.35. Возьмём множества $A = B = C = [0, 1]$ и $D = [0, 0.5)$. Тогда (см. задачу 2.14) $A \sim C$, $B \sim D$, но $A \setminus B = \varnothing \not\sim C \setminus D = [0.5, 1]$. $\square$

2.36. Возьмём множества $A = C = [0, 1]$ и $B = [0, 0.5)$. Тогда $A \sim \sim B$, но $C \setminus B = [0.5, 1] \not\sim C \setminus A = \varnothing$. $\square$

2.37. Рассмотрим множества $A = [0, 2]$ и $B = C = [0, 1)$. Тогда $A \sim B$, но $B \setminus C = \varnothing \not\sim A \setminus C = [1, 2]$. $\square$

2.38. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Определим множество

$$B = \{z_{n,k,j} = a_n - a_k + j, \text{ где } n, k \in \mathbb{N} \text{ и } j = 0, 1\}.$$

Ясно, что B счётно, поэтому существует число $a \in [0, 1] \setminus B$. Предположим, что существует $x \in A \cap A + a \pmod 1$. Тогда для некоторых k и j выполнено либо равенство $a_k = a_j + a$, либо равенство $a_k = a_j + a - 1$. Это означает, что $a \in B$, и мы пришли к противоречию. $\square$

2.39. Пусть $A = \{(a_1, \ldots, a_n, \ldots)\}$, где $a_{2n-1} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} \in \{0, 1\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{a_{2n}\}$ не имеет периода (1). Пусть $B = \{(a_1, \ldots, a_n, \ldots)\}$, где $a_{2n} = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n-1} \in \{0, 1\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и последовательность $\{a_{2n-1}\}$ не имеет периода (1). Ясно, что оба множества имеют мощность $\mathfrak{c}$. Отождествим множества A и B с подмножествами отрезка $[0, 1]$, поставив в соответствие каждой последовательности точку с соответствующим двоичным разложением. Поскольку ни A, ни B не содержат последовательностей с единицей в периоде, то переход от разложения к точке и обратно однозначен. Предположим, что $b(1)$ и $b(2)$ — две разные точки из B. Тогда найдётся такое $n \geqslant 1$, что, например, $b(1)_{2n-1} = 0$ и $b(2)_{2n-1} = 1$. Предположим, что существует точка $z \in (A + b(1)) \cap (A + b(2))$. Так как $z \in A + b(1)$, то $z_{2n-1} = 0$, но так как $z \in A + b(2)$, то $z_{2n-1} = 1$. Мы получили противоречие, следовательно, $(A + b(1)) \cap (A + b(2)) = \varnothing$. $\square$

2.40. Пусть f — взаимно однозначное соответствие между B и A_1. Положим $A_2 = f(B_1)$. Тогда $A \sim A_2$ и $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$. В силу результата задачи 2.31 получаем, что $A \sim A_1 \sim B$. $\square$

2.41. Пусть f — биекция Ω на $\mathbb{R}$, и пусть для каждого $\omega \in \Omega$ g_ω — биекция A_ω на $\mathbb{R}$. Для каждого $x \in A$, используя аксиому выбора, найдём $\omega(x)$, для которого $x \in A_{\omega(x)}$. Определим на A функцию F следующим образом: $F(x) = (g_{\omega(x)}(x), f(\omega(x)))$. Тогда видно, что F — биекция A на некоторое подмножество в $\mathbb{R}^2$. Так как $\mathbb{R}^2$ имеет мощность $\mathfrak{c}$ (см. задачу 2.24), то $\overline{\overline{A}} \leqslant \mathfrak{c}$. С другой стороны, каждое множество $A_\omega \subseteq A$ по условию имеет мощность $\mathfrak{c}$. По теореме Кантора–Бернштейна (задача 2.40) получаем, что $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{c}$. $\square$

2.42. Пусть C — множество всех постоянных функций на $[0, 1]$. Тогда мощность C равна $\mathfrak{c}$. С другой стороны, можно определить на $C([0, 1])$ отображение $F(f) = (f(r_1), \ldots, f(r_n), \ldots)$, где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$. Так как множество рациональных чисел плотно на отрезке, то $F(f) \neq F(g)$ при $f \not\equiv g$. Таким образом, множество $C[0, 1]$ эквивалентно некоторому подмножеству множества всех последовательностей вещественных чисел, которое в силу результата задачи 2.25 имеет мощность $\mathfrak{c}$. Применение теоремы Кантора–Бернштейна (задача 2.40) завершает доказательство. $\square$

2.43. Пусть $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ — занумерованное некоторым образом множество $\mathbb{Q}_{[0;1]}$, взята функция $f(x) \in A$, множество $X_f = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — множество всех точек разрыва функции $f(x)$ на $[0, 1]$ (оно счётно в силу результата задачи 2.4), $Y_f = \{f(x_1), \ldots \ldots, f(x_n), \ldots\}$ и $Q_f = \{f(r_1), \ldots, f(r_n), \ldots\}$. Заметим, что если для двух монотонных функций f и g выполнены равенства $X_f = X_g$, $Y_f = Y_g$ и $Q_f = Q_g$, то $f(x) \equiv g(x)$ на $[0, 1]$. Далее, из задачи 2.25 следует, что множество троек (X_f, Y_f, Q_f), где $f(x) \in A$, есть подмножество некоторого множества мощности $\mathfrak{c}$. С другой стороны, A содержит множество всех постоянных на $[0, 1]$ функций, которое имеет мощность $\mathfrak{c}$.

Следовательно, по теореме Кантора–Бернштейна (задача 2.40) A имеет мощность континуума. $\square$

2.44. Утверждение следует из задач 2.42 и 2.25.

2.45. Заметим, что множество A содержит характеристические функции $\chi_E(x)$ для всех множеств $E \subseteq [0,1]$, т. е. A содержит подмножество мощности $2^{\mathfrak{c}}$. С другой стороны, для каждой $f(x) \in A$ рассмотрим её график P_f на плоскости. Ясно, что если графики функций f и g совпадают, то и сами функции совпадают. Но $\{P_f\}_{f\in A}$ есть подмножество множества всех подмножеств плоскости. Так как плоскость имеет мощность $\mathfrak{c}$ (см. задачу 2.24), то множество её подмножеств имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$, а тогда мощность A не превосходит $2^{\mathfrak{c}}$. Используя теорему Кантора–Бернштейна (задача 2.40), получаем, что A имеет мощность $2^{\mathfrak{c}}$. $\square$

2.46. Утверждение следует из задач 2.45 и 2.44.

2.47. Отметим, что так как $B \subseteq A$ и $C \subseteq A$, то с учётом теоремы Кантора–Бернштейна (задача 2.40) достаточно доказать, что мощность хотя бы одного из множеств, A или B, не меньше чем $\mathfrak{c}$. Без ограничения общности предположим, что $B \cap C = \varnothing$. Пусть $f(x)$ — взаимно однозначное соответствие между множествами $[0,1]^2$ и A. Возможны два варианта.

1) Существует такое $x \in [0,1]$, что $f(x,y) \in B$ для каждого $y \in [0,1]$. Тогда B содержит подмножество мощности $\mathfrak{c}$ (отрезок).

2) Для любого $x \in [0,1]$ существует такое $y = y(x) \in [0,1]$, что $f(x,y) \in C$. Тогда C содержит подмножество мощности $\mathfrak{c}$, а именно $\{x, y(x)\}_{x\in[0,1]}$. $\square$

2.48. Отметим, что так как $A_i \subseteq A$, то с учётом задачи 2.40 достаточно доказать, что мощность некоторого A_i не меньше чем $\mathfrak{c}$. Без ограничения общности можно считать, что $A_i \cap A_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Пусть $f(x)$ — биекция множества B последовательностей $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)\}$, где $a_j \in [0,1]$ при $j \in \mathbb{N}$, на A (в задаче 2.25 показано, что $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{c}$). Возможны два варианта.

1. Для любого $a_1 \in [0,1]$ существуют такие $a_2, a_3, \ldots \in [0,1]$, что $f((a_1, a_2, \ldots)) \in A_1$. В этом случае множество A_1 содержит подмножество мощности $\mathfrak{c}$.

2. Существует такое $a_1^0 \in [0,1]$, что для каждого $a_2, a_3, \ldots \in [0,1]$ выполнено условие $f((a_1^0, a_2, \ldots)) \notin A_1$. Тогда у нас опять возникают две возможности:

2а) для каждого $a_2 \in [0,1]$ найдутся такие $a_3, a_4, \ldots \in [0,1]$, что $f((a_1^0, a_2, a_3, \ldots)) \in A_2$. Тогда A_2 имеет мощность $\mathfrak{c}$;

2б) существует такое $a_2^0 \in [0,1]$, что для любого $a_3, a_4, \ldots \in [0,1]$ выполнено условие $f((a_1^0, a_2^0, a_3, \ldots)) \notin A_2$.

Повторяя этот процесс по индукции, мы получаем один из двух случаев.

I. На некотором шаге нашлось A_n, имеющее мощность $\mathfrak{c}$;

II. Нашлись такие числа $a_1^0, a_2^0, \ldots \in [0,1]$, что $f(\mathbf{a_0}) \equiv \equiv f((a_1^0, a_2^0, a_3^0, \ldots)) \notin A_n$ для любого n. Но тогда $f(\mathbf{a_0}) \notin A$. Это противоречит условию, т. е. данный случай невозможен. $\square$

2.49. Да, можно. Например, рассмотрим окружности с центром в фиксированной точке x_0 и произвольным радиусом $r \in (0,1)$. $\square$

2.50. Нет, нельзя. Если дано некоторое множество таких окружностей, то можно выбрать внутри каждой из них точку с рациональными координатами. Так как ни одна окружность не лежит внутри другой, то разным окружностям будут соответствовать разные точки, т. е. мы получили биекцию взятого множества букв на некоторое множество $E \subseteq \mathbb{Q}^2$. Но множество $\mathbb{Q}^2$ счётно в силу результата задачи 2.6. $\square$

2.51. Нарисуем на плоскости букву «А» и обозначим через $S_1(A)$ и $S_2(A)$ открытые множества, изображённые на рис. 2.1.

Тогда мы можем выбрать для каждой буквы «А» пару точек из $\mathbb{Q}^2$: $z_1(A) \in S_1(A)$ и $z_2(A) \in S_2(A)$. Предположим теперь, что две буквы A_1 и A_2 не пересекаются. Тогда A_2 либо лежит в области $S_1(A_1)$, либо не пересекается с этой областью. В первом случае $z_2(A_2) \neq z_2(A_1)$. Во втором случае $z_1(A_2) \neq z_1(A_1)$. Так как множество пар точек с рациональными координатами счётно (см. задачу 2.6), то множество букв не более чем счётно. $\square$

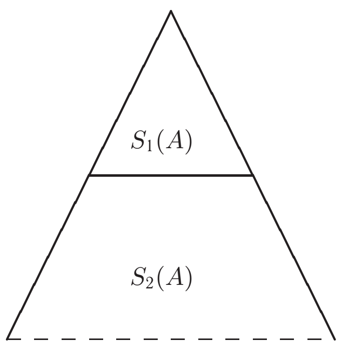

Рис. 2.1

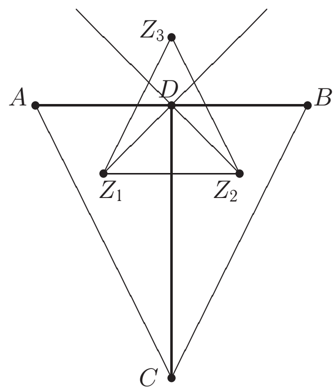

Рис. 2.2

2.52. Для буквы «Т» определим точки A, B, C и D, как это сделано на рис. 2.2.

Выберем в треугольнике ACD точку Z_1 с рациональными координатами и в треугольнике BCD точку Z_2 с рациональными координатами. Затем выберем точку Z_3 с рациональными координатами, лежащую в угле, вертикальном с углом Z_1DZ_2. Заметим, что по построению каждая сторона треугольника $Z_1Z_2Z_3$ пересекает ровно один из отрезков DA, DB и DC, а точка D лежит внутри этого треугольника.

Так как множество шестёрок рациональных чисел счётно (см. задачу 2.6), то нам достаточно доказать, что двум непересекающимся буквам «T» не может соответствовать один и тот же набор точек (Z_1, Z_2, Z_3). Предположим, что для другой буквы «T», состоящей из отрезков $A'B'$ и $C'D'$, получилась та же тройка точек Z_i. Тогда точка D' лежит в одной из трёх частей, на которые треугольник $Z_1Z_2Z_3$ разбит отрезками DA, DB и DC. Если она лежит с той же стороны от AB, что и точка Z_3, то выходящий из неё отрезок не может пересечь Z_1Z_2 и не пересечь при этом AB, т. е. буквы T и T' пересекаются. Если D' лежит в треугольнике ADC, то выходящий их неё отрезок, пересекающий Z_2Z_3, должен пересечь либо AD, либо DC. Аналогично рассматривается и третий случай. Таким образом, непересекающимся буквам соответствуют разные тройки (Z_1, Z_2, Z_3). □

2.53. Используя аксиому выбора, выберем для каждого $y \in f((0,1))$ такую точку $x \in (0,1)$, что $f(x) = y$, и обозначим множество этих точек через A. Далее, для любого $x \in A$ выберем пару рациональных чисел $r_1(x) < x < r_2(x)$ так, чтобы для любого $t \in (r_1(x), r_2(x))$ было выполнено неравенство $f(t) \leqslant f(x)$. Пусть $x, z \in A$ — две разные точки. Тогда по построению $f(x) \neq f(z)$. Предположим, что $f(x) > f(z)$. Тогда если $r_1(x) = r_1(z)$ и $r_2(x) = r_2(z)$, то $f(x) \leqslant f(z)$. Противоречие. Таким образом, различным $x \in A$ соответствуют разные пары рациональных точек, и так как в силу результата задачи 2.6 множество $\mathbb{Q}^2$ счётно, то A не более чем счётно, а значит, и образ f не более чем счётен. □

2.54. Рассмотрим на интервале $(0,1)$ следующую функцию: $f(x) = \frac{1}{n}$, если $\frac{1}{n+1} \leqslant x < \frac{1}{n}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Функция f удовлетворяет условиям задачи. □