

Линейные пространства функций

О. ЛП называется *нормированным*, если для любого элемента $x \in N$ определено число $\|x\| \in \mathbb{R}$ (*норма*) так, что выполнены следующие условия:

- 1) $\forall x \in N \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- 2) $\forall x \in N, \forall \lambda \in \mathbb{R} \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
- 3) $\forall x, y \in N \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Рассмотрим бесконечномерное ЛП вещественных, непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $y(x)$. На нём можно ввести норму двумя способами:

$$\|y\|_{C[a;b]} = \max_{x \in [a;b]} |y(x)|,$$

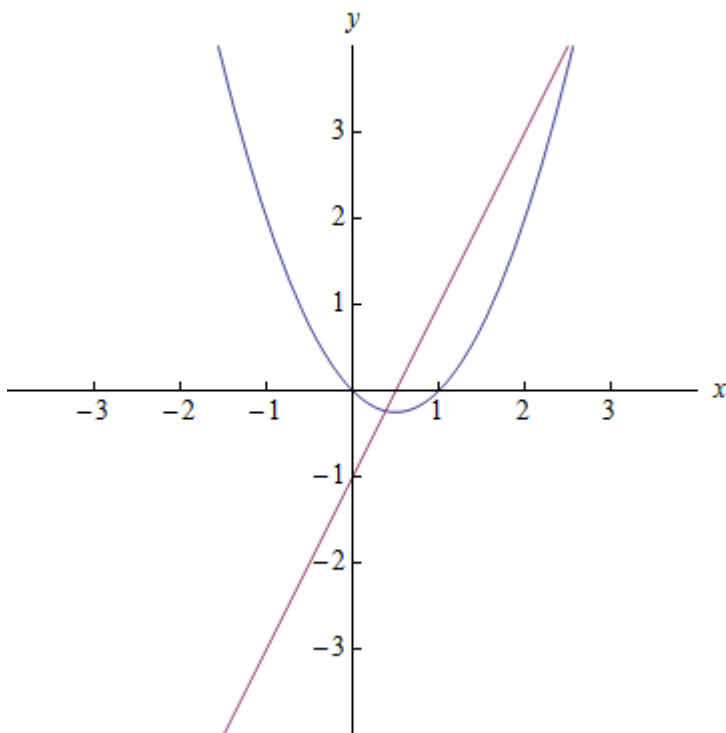
$$\|y\|_{h[a;b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(x) dx}.$$

Нормированные пространства $C[a; b]$ и $h[a; b]$ — это линейные пространства непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций с соответствующим образом введёнными нормами.

В бесконечномерном ЛП вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ вместе со своими производными до p -го порядка включительно, норма вводится следующим образом:

$$\|y\|_{C^{(p)}[a;b]} = \sum_{k=0}^p \max_{x \in [a;b]} |y^{(k)}(x)|.$$

Пример 1. Вычислить $\|y\|_{C[0;2]}$, $\|y\|_{C^{(1)}[0;2]}$ и $\|y\|_{h[0;2]}$ для $y(x) = x^2 - x$.



$$\|y\|_{C[0;2]} = \max_{x \in [0;2]} |y(x)| = 2.$$

$$\|y\|_{C^{(1)}[0;2]} = \max_{x \in [0;2]} |y(x)| + \max_{x \in [0;2]} |y'(x)| = 2 + \max_{x \in [0;2]} |2x - 1| = 2 + 3 = 5.$$

$$\|y\|_{h[0;2]}^2 = \int_0^2 y^2(x) dx = \int_0^2 (x^2 - x)^2 dx =$$

$$= \int_0^2 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx =$$

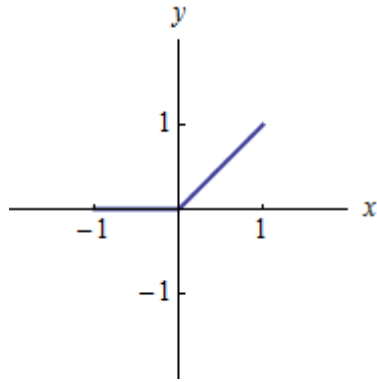
$$= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5} - 8 + \frac{8}{3} = \frac{16}{15},$$

$$\|y\|_{h[0;2]} = \frac{4}{\sqrt{15}}.$$

Ответ: $\|y\|_{C[0;2]} = 2, \quad \|y\|_{C^{(1)}[0;2]} = 5,$

$$\|y\|_{h[0;2]} = \frac{4}{\sqrt{15}}.$$

Пример 2. Можно ли на множестве функций, непрерывных на отрезке $[-1; 1]$, ввести норму формулой $\|y\| = \max_{x \in [-1; 0]} |y(x)|$?



Прежде всего, норма должна быть вещественным числом — это выполняется. Проверим выполнение аксиом нормы.

1) $\|y\| \geq 0$ — выполняется, $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y(x) = \theta(x) \equiv 0$ — не выполняется. В самом деле, рассмотрим функцию

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ x, & x \in (0; 1]. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна на отрезке $[-1; 1]$, $\|y\| = 0$, но $y(x) \not\equiv 0$, т. е. $y \neq \theta$.

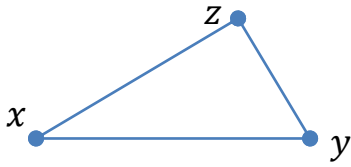
Ответ: нельзя.

О. Множество M называется *метрическим пространством*, если $\forall x, y \in M$ определено число $\rho(x, y) \in \mathbb{R}$ (*метрика* или *расстояние*) так, что выполняются следующие условия:

1) $\forall x, y \in M \rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\forall x, y \in M \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\forall x, y, z \in M \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*неравенство треугольника*).



Любое нормированное пространство можно сделать метрическим, если ввести метрику по формуле $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Пример 3. Найдите расстояние между функциями $y(x) = 2 \sin \pi x$ и $z(x) = \cos \pi x$ в пространствах $C[0; 2]$, $C^{(1)}[0; 2]$ и $h[0; 2]$.

$$\rho(y, z)_{C[0; 2]} = \|2 \sin \pi x - \cos \pi x\|_{C[0; 2]} = \max_{x \in [0; 2]} |2 \sin \pi x - \cos \pi x| =$$

$$= \max_{x \in [0; 2]} \left| \sqrt{5} \left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\cos \varphi} \sin \pi x - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\sin \varphi} \cos \pi x \right) \right| = \max_{x \in [0; 2]} |\sqrt{5} \sin(\pi x - \varphi)| = \sqrt{5},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in (0; \frac{\pi}{2})$; максимум модуля достигается при $x = \frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

$$\rho(y, z)_{C^{(1)}[0; 2]} = \|2 \sin \pi x - \cos \pi x\|_{C^{(1)}[0; 2]} =$$

$$= \max_{x \in [0; 2]} |2 \sin \pi x - \cos \pi x| + \max_{x \in [0; 2]} |2\pi \cos \pi x + \pi \sin \pi x| =$$

$$= \sqrt{5} + \max_{x \in [0; 2]} \left| \sqrt{5} \pi \left(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}}_{\cos \varphi} \cos \pi x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}}_{\sin \varphi} \sin \pi x \right) \right| = \sqrt{5} + \max_{x \in [0; 2]} |\sqrt{5} \pi \cos(\pi x - \varphi)| =$$

$$= \sqrt{5}(1 + \pi),$$

где максимум модуля достигается при $x = \frac{\varphi}{\pi}$.

$$\begin{aligned} \rho^2(y, z)_{h[0;2]} &= \|2 \sin \pi x - \cos \pi x\|_{h[0;2]}^2 = \int_0^2 (2 \sin \pi x - \cos \pi x)^2 dx = \\ &= \int_0^2 (4 \sin^2 \pi x - 4 \sin \pi x \cos \pi x + \cos^2 \pi x) dx = \\ &= \int_0^2 (2 - 2 \cos 2\pi x - 2 \sin 2\pi x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\pi x) dx = 5, \end{aligned}$$

$$\rho(y, z)_{h[0;2]} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Ответ: } \rho(y, z)_{C[0;2]} = \sqrt{5}, \rho(y, z)_{C^{(1)}[0;2]} = \sqrt{5}(1 + \pi), \rho(y, z)_{h[0;2]} = \sqrt{5}.$$

Пространство $h[a; b]$ будет евклидовым, если ввести в нём СП по формуле

$$(y, z) = \int_a^b y(x)z(x) dx.$$

$$\text{Тогда } (y, y) = \|y\|^2.$$

В евклидовых пространствах справедливо неравенство Коши—Буняковского

$$(y, z)^2 \leq (y, y) \cdot (z, z),$$

которое в случае пространства $h[a; b]$ принимает вид

$$\left(\int_a^b y(x)z(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b y^2(x) dx \cdot \int_a^b z^2(x) dx.$$

О. Последовательность элементов нормированного пространства $x_n \in$ называется *ограниченной*, если $\exists M: \forall n \in \mathbb{N} \|x_n\| \leq M$.

О. Последовательность $x_n \in N$ сходится к элементу $x_0 \in N$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Сходимость функциональных последовательностей в норме $C[a; b]$ является равномерной сходимостью, сходимость функциональных последовательностей в норме в $h[a; b]$ является сходимостью в среднем.

О. Последовательность $x_n \in N$ называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N}$:

$$\forall n > K, \forall p \in \mathbb{N} \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Т. Если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Обратное, вообще говоря, не верно в бесконечномерных нормированных пространствах.

О. Последовательность $x_n \in N$ называется *компактной*, если из любой её подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Примеры: $\{0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots, 0, n, \dots\}$ — некомпактная последовательность чисел (т. к. из её подпоследовательности $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность); $\{0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots, 0, 1, 2, \dots\}$ — компактная последовательность чисел (т. к. любая её подпоследовательность является ограниченной, и поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность по теореме Больцано—Вейерштрасса).

Пример 4 (самостоятельно). Докажите, что последовательность функций $y_n = \sin nx$ ограничена в пространстве $h[0; \pi]$, но не компактна.

$$\|y_n\|_{h[0;\pi]}^2 = \int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\|y_n\|_{h[0;\pi]} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{последовательность ограничена.}$$

Если бы она была компактна, то из любой её подпоследовательности можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность. Но

$$\|y_n - y_m\|_{h[0;\pi]}^2 = \int_0^\pi (\sin nx - \sin mx)^2 \, dx = \int_0^\pi (\sin^2 nx - 2 \sin nx \sin mx + \sin^2 mx) \, dx =$$

$$= \pi + \int_0^\pi (\cos(n+m)x - \cos(n-m)x) \, dx = \pi, \quad \forall n \neq m,$$

$$\|y_n - y_m\|_{h[0;\pi]} = \sqrt{\pi}, \quad \forall n \neq m,$$

поэтому никакая подпоследовательность последовательности y_n не может быть фундаментальной, а следовательно, не может сходиться, ч. т. д.

Таким образом, в бесконечномерных нормированных пространствах теорема Больцано—Вейерштрасса не выполняется, т. е. не из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность!

Пример 5. Приведите пример ограниченной, но не компактной последовательности в пространстве $C^{(1)}[0; \pi]$.

Рассмотрим последовательность $y_n = \frac{\cos 2^n x}{2^n}$. Докажем, что она ограничена в $C^{(1)}[0; \pi]$:

$$\|y_n\|_{C^{(1)}[0;\pi]} = \max_{x \in [0;\pi]} |y_n(x)| + \max_{x \in [0;\pi]} |y'_n(x)| = \max_{x \in [0;\pi]} \left| \frac{\cos 2^n x}{2^n} \right| + \max_{x \in [0;\pi]} |-\sin 2^n x| \leq 2,$$

ч. т. д.

Теперь докажем, что последовательность не компактна в $C^{(1)}[0; \pi]$. Если бы она была компактной, то из любой её подпоследовательности можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность. Пусть эта сходящаяся подпоследовательность имеет вид y_{n_k} . Поскольку она сходится, то она является фундаментальной, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k > K, \forall p \in \mathbb{N}$

$$\|y_{n_{k+p}} - y_{n_k}\|_{C^{(1)}[0;\pi]} < \varepsilon, \text{ т. е. } \max_{x \in [0;\pi]} |y_{n_{k+p}}(x) - y_{n_k}(x)| + \max_{x \in [0;\pi]} |y'_{n_{k+p}}(x) - y'_{n_k}(x)| < \varepsilon.$$

Но для любого номера n_k найдётся точка $x_* = \frac{1}{2^{n_k}} \cdot \frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$, в которой

$$y'_{n_k}(x_*) = -\sin(2^{n_k} x_*) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1,$$

$$y'_{n_{k+p}}(x_*) = -\sin(2^{n_{k+p}} x_*) = -\sin(2^{n_{k+p}-n_k-1} \pi) = 0,$$

т. к. $2^{n_{k+p}-n_k-1} = m \in \mathbb{N}, \sin m\pi = 0$.

Но тогда

$$\begin{aligned} \|y_{n_{k+p}} - y_{n_k}\|_{C^{(1)}[0;\pi]} &= \max_{x \in [0;\pi]} |y_{n_{k+p}}(x) - y_{n_k}(x)| + \max_{x \in [0;\pi]} |y'_{n_{k+p}}(x) - y'_{n_k}(x)| \geq \\ &\geq |y'_{n_{k+p}}(x_*) - y'_{n_k}(x_*)| = 1, \end{aligned}$$

и поэтому данная величина не может быть меньше любого наперёд заданного положительного числа ε , т. е. никакая подпоследовательность последовательности y_n не может быть

фундаментальной, а следовательно, не может сходиться. Значит, последовательность y_n — не компактная в $C^{(1)}[0; \pi]$, ч. т. д.

Ответ: $y_n = \frac{\cos 2^n x}{2^n}$.

Линейные операторы

Пусть $A: N_1 \rightarrow N_2$ — линейный оператор, который переводит элементы нормированного пространства N_1 в элементы нормированного пространства N_2 .

$D(A)$ — область определения оператора, $R(A)$ — область значений оператора.

О. Нормой линейного оператора A называется число $\|A\|_{N_1 \rightarrow N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$.

О. Линейный оператор A называется *ограниченным*, если $\|A\|_{N_1 \rightarrow N_2} < +\infty$.

О. Оператором *Фредгольма* называется линейный оператор A , действующий на непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции $y(x)$ по формуле $Ay = \int_a^b K(x, s)y(s) ds$, где $K(x, s)$ — непрерывная функция (*ядро* оператора Фредгольма).

Пример 6. Докажите, что оператор Фредгольма $Ay = \int_0^1 xsy(s) ds$ является ограниченным при действии $h[0; 1] \rightarrow h[0; 1]$, и получите оценку сверху для его нормы в этом случае.

$$\|A\|_{h[0;1] \rightarrow h[0;1]} = \sup_{\|y\|_{h[0;1]}=1} \|Ay\|_{h[0;1]}.$$

Пусть $\|y\|_{h[0;1]} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|Ay\|_{h[0;1]}^2 &= \int_0^1 (Ay(x))^2 dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 xsy(s) ds \right)^2 dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 sy(s) ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 s^2 ds \cdot \underbrace{\int_0^1 y^2(s) ds}_{\|y\|_{h[0;1]}^2=1} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

(Здесь было использовано неравенство Коши—Буняковского.) Значит, $\|Ay\|_{h[0;1]} \leq \frac{1}{3}$,

$$\|A\|_{h[0;1] \rightarrow h[0;1]} = \sup_{\|y\|_{h[0;1]}=1} \|Ay\|_{h[0;1]} \leq \frac{1}{3}, \text{ поэтому оператор ограничен, ч. т. д.}$$

Ответ: $\|Ay\|_{h[0;1]} \leq \frac{1}{3}$.

О. Оператор $A: N_1 \rightarrow N_2$ называется *непрерывным* в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(A)$, сходящейся к y_0 , последовательность Ay_n сходится к Ay_0 .

О. Оператор $A: N_1 \rightarrow N_2$ называется *вполне непрерывным*, если он переводит любую ограниченную последовательность в компактную.

Пример 7. Докажите, что оператор Фредгольма $Ay = \int_0^\pi \sin x \cos s y(s) ds$ является вполне непрерывным при действии $h[0; \pi] \rightarrow h[0; \pi]$.

Требуется доказать, что оператор переводит любую ограниченную последовательность в компактную. Пусть y_n — ограниченная в $h[0; \pi]$ последовательность:

$$\exists M: \forall n \in \mathbb{N} \|y_n\|_{h[0; \pi]} \leq M.$$

Пусть $z_n = Ay_n$. Докажем, что z_n — компактная в $h[0; \pi]$ последовательность. Доказательство будет основано на следующей теореме.

Т. (Арцела). Если функциональная последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a; b]$, то из неё можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[a; b]$ подпоследовательность.

- 1) Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена на отрезке $[0; \pi]$, т. е. $\exists L: \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; \pi] |z_n(x)| \leq L$. Воспользовавшись неравенством Коши—Буняковского, получим:

$$|z_n(x)| = \left| \int_0^\pi \sin x \cos s y_n(s) ds \right| = |\sin x| \cdot \left| \int_0^\pi \cos s y_n(s) ds \right| \leq \left| \int_0^\pi \cos s y_n(s) ds \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\int_0^\pi \cos^2 s ds}}_{\leq \sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\sqrt{\int_0^\pi y_n^2(s) ds}}_{\|y_n\| \leq M} \leq \sqrt{\pi} M, \quad \text{ч. т. д.}$$

- 2) Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна на отрезке $[0; \pi]$, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, x_2 \in [0; \pi], |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |z_n(x_1) - z_n(x_2)| < \varepsilon$. Для этого воспользуемся полученной выше оценкой:

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_0^\pi \sin x_1 \cos s y_n(s) ds - \int_0^\pi \sin x_2 \cos s y_n(s) ds \right| =$$

$$= \left| (\sin x_1 - \sin x_2) \cdot \int_0^\pi \cos s y_n(s) ds \right| \leq |\sin x_1 - \sin x_2| \cdot \left| \int_0^\pi \cos s y_n(s) ds \right| \leq$$

$$\leq |\sin x_1 - \sin x_2| \cdot \sqrt{\pi} M.$$

Поскольку функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $[0; \pi]$, то по теореме Кантора она является равномерно непрерывной на отрезке $[0; \pi]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$\forall x_1, x_2 \in [0; \pi], |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\sin x_1 - \sin x_2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi} M}$, откуда $|z_n(x_1) - z_n(x_2)| < \varepsilon$, ч. т. д.

- 3) Итак, функциональная последовательность $z_n(x)$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на отрезке $[0; \pi]$. Это будет справедливо и для любой её подпоследовательности. Согласно теореме Арцела, из неё можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке $[0; \pi]$ подпоследовательность. Из равномерной сходимости следует сходимость в среднем. Таким образом, последовательность z_n является компактной в $h[0; \pi]$, ч. т. д.