

Семинар 7

Система линейных однородных ОДУ 1-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — неизвестные функции, a_{ij} — постоянные коэффициенты, $\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}$.

Методы решения системы (1).

1. Исключение неизвестных функций. Путём последовательного исключения неизвестных функций систему сводят к одному уравнению n -го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким уравнениям меньшего порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию.

Пример 1 (Филиппов № 857). Решить систему:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$$

Выразив функцию z из первого уравнения, подставим её во второе и третье уравнение:

$$\begin{cases} z = \frac{\dot{x}}{2} + \frac{x}{2} + y, \\ \dot{y} = -x + y + \dot{x}, \\ \frac{\ddot{x}}{2} + \dot{y} = -\frac{3x}{2} + y + \dot{x}. \end{cases}$$

Теперь исключим функцию y , вычтя из третьего уравнения второе:

$$\begin{cases} z = \frac{\dot{x}}{2} + \frac{x}{2} + y, \\ \dot{y} - \dot{x} = y - x, \\ \frac{\ddot{x}}{2} = -\frac{x}{2}. \end{cases}$$

Третье уравнение $\ddot{x} + x = 0$ имеет общее решение

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Найденную функцию $x(t)$ можно подставить во второе уравнение и определить $y(t)$. Но в данном случае удобнее поступить иначе. Сделаем во втором уравнении замену

$y - x = u(t)$. Тогда оно принимает вид $\dot{u} = u$, откуда

$$u(t) = C_3 e^t, \quad C_3 \in \mathbb{R},$$

т. е. $y - x = C_3 e^t$, и

$$y(t) = x + C_3 e^t = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t.$$

Теперь из первого уравнения:

$$z(t) = \frac{\dot{x}}{2} + \frac{x}{2} + y = \frac{C_1}{2} (\cos t + 3 \sin t) + \frac{C_2}{2} (3 \cos t - \sin t) + C_3 e^t.$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \\ y = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3 e^t, \\ z = \frac{C_1}{2} (\cos t + 3 \sin t) + \frac{C_2}{2} (3 \cos t - \sin t) + C_3 e^t, \end{cases} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Построение ФСР.

Запишем однородную систему (1) в матричном виде:

$$\dot{X} = AX, \quad (2)$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных функций, $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — постоянная матрица.

Решения системы (2) образуют ЛП размерности n , поэтому ОР системы (2) имеет вид:

$$X(t) = \sum_{k=1}^n C_k X_k(t), \quad C_k \in \mathbb{R},$$

где $X_1(t), \dots, X_n(t)$ — ФСР (ФСР образуют любые n ЛНЗ решений системы (2)).

Пусть $X_1(t), \dots, X_n(t)$ — некоторые решения системы (2). На столбцах $X_1(t), \dots, X_n(t)$ можно построить определитель $W(t)$ — вронскиан.

Т. Если n решений системы (2) — ЛЗ, то $W(t) \equiv 0$. Если они ЛНЗ, то $W(t) \neq 0$ во всех точках.

Чтобы построить ФСР, будем искать ЧР системы (2) в виде $X(t) = Te^{\lambda t}$, где T — постоянный ненулевой столбец. Подставив в (2), получим

$$\lambda Te^{\lambda t} = ATe^{\lambda t},$$

откуда

$$AT = \lambda T.$$

Таким образом, T — СВ матрицы A , а λ — её СЗ, т. е. корни ХУ:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (3)$$

Случай простых корней. Пусть все корни λ_j — простые. Тогда каждому корню λ_j соответствует ЧР системы (2) вида $X_j(t) = T_j e^{\lambda_j t}$, где T_j — некоторый СВ матрицы A , соответствующий СЗ λ_j :

$$(A - \lambda_j E)T_j = \theta, \quad T_j \neq \theta.$$

Всего получится n ЛНЗ ЧР, которые образуют ФСР.

Если есть комплексно сопряжённые корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то им соответствуют комплексно сопряжённые ЧР:

если $X_+(t)$ — решение для $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, то

$X_-(t)$ — решение для $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, где

$$\operatorname{Re} X_- = \operatorname{Re} X_+, \quad \operatorname{Im} X_- = -\operatorname{Im} X_+.$$

Тогда два ЛНЗ вещественных решения, соответствующих корням ХУ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, можно взять в виде:

$$X_1(t) = \operatorname{Re} X_+(t), \quad X_2(t) = \operatorname{Im} X_+(t).$$

Пример 2. Решим систему из примера 1:
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -2x - y + 2z, \\ \dot{z} = -3x - 2y + 3z. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде:

$$\dot{X} = AX, \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём корни ХУ:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 + \lambda & 0 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 - \lambda & 2 \\ -3 & -5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda - 1)[(-3 - \lambda)(3 - \lambda) + 10] = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Все корни имеют кратность 1.

1) Найдём ЧР, отвечающее $\lambda_1 = 1$. Это $X_1(t) = T_1 e^{\lambda_1 t}$, где $T_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ — СВ:

$$(A - \lambda_1 E)T_1 = \theta.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решим ОСЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} b_1 = 0, \\ b_2 = b_3. \end{cases}$$

$$\text{ОР: } b_3 = C, b_1 = 0, b_2 = C.$$

Тогда все СВ, отвечающие СЗ $\lambda_1 = 1$, имеют вид:

$$T_1 = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \neq 0.$$

Пусть $C = 1$, тогда $T_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, и получим ЧР:

$$X_1(t) = T_1 e^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

2) Для комплексно сопряжённых корней $\lambda_{2,3} = \pm i$ имеем ЧР: $X_2(t) = \operatorname{Re} X_+(t)$,

$X_3(t) = \operatorname{Im} X_+(t)$, где $X_+(t) = T_+ e^{it}$, $T_+ = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ — СВ, отвечающий $\lambda_2 = i$:

$$(A - iE)T_+ = \theta.$$

$$\begin{pmatrix} -1 - i & -2 & 2 \\ -2 & -1 - i & 2 \\ -3 & -2 & 3 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 - i & -2 & 2 \\ -2 & -1 - i & 2 \\ -3 & -2 & 3 - i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 - i & -2 & 2 \\ 1 & 1 - i & -1 + i \\ -3 & -2 & 3 - i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - i & -1 + i \\ -1 - i & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 - i \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - i & -1 + i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3i & 2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - i & -1 + i \\ 0 & 1 - 3i & 2i \\ 0 & 1 & \frac{-3 + i}{5} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3+i}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-3+i}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{3-i}{5} d_3, \\ d_2 = \frac{3-i}{5} d_3. \end{cases}$$

ОР: $d_3 = C$, $d_1 = \frac{3-i}{5} C$, $d_2 = \frac{3-i}{5} C$.

Тогда все СВ, отвечающие СЗ $\lambda_2 = i$, имеют вид:

$$T_+ = C \begin{pmatrix} \frac{3-i}{5} \\ \frac{3-i}{5} \\ \frac{3-i}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \neq 0.$$

Пусть $C = 5$, тогда $T_+ = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ 3-i \\ 5 \end{pmatrix}$, и соответствующее ЧР:

$$X_+(t) = T_+ e^{it} = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ 3-i \\ 5 \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 3-i \\ 3-i \\ 3-i \\ 5 \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cos t - i \cos t + 3i \sin t + \sin t \\ 3 \cos t - i \cos t + 3i \sin t + \sin t \\ 3 \cos t - i \cos t + 3i \sin t + \sin t \\ 5 \cos t + 5i \sin t \end{pmatrix},$$

$$X_2(t) = \operatorname{Re} X_+(t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = \operatorname{Im} X_+(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + 3 \sin t \\ -\cos t + 3 \sin t \\ -\cos t + 3 \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}.$$

Проверим линейную независимость решений $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$. Для этого вычислим вронскиан:

$$W(t) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \cos t + \sin t & -\cos t + 3 \sin t \\ e^t & 3 \cos t + \sin t & -\cos t + 3 \sin t \\ e^t & 5 \cos t & 5 \sin t \end{vmatrix} = -5e^t \neq 0.$$

Значит, решения $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ — ЛНЗ и образуют ФСР. Тогда ОР системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$, где $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \cos t + \sin t \\ 3 \cos t + \sin t \\ 5 \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -\cos t + 3 \sin t \\ -\cos t + 3 \sin t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ совпадает с полученным в примере 1 с точностью до обозначения произвольных констант.

Случай кратных корней. Если есть кратные корни ХУ (3), то для построения ФСР каждому корню должно соответствовать такое количество ЛНЗ ЧР, какова кратность корня.

- 1) Пусть λ — корень ХУ (3) кратности p . Если ему соответствует p ЛНЗ СВ T_1, \dots, T_p , т. е. геометрическая кратность СЗ λ совпадает с алгебраической, то получаем p ЛНЗ ЧР: $T_1 e^{\lambda t}, \dots, T_p e^{\lambda t}$.
- 2) Пусть λ — корень ХУ (3) кратности p , но ему соответствует $s < p$ ЛНЗ СВ, т. е. геометрическая кратность СЗ λ меньше алгебраической. В этом случае СВ не хватает

для построения p ЛНЗ ЧР. Тогда можно строить ЧР методом неопределённых коэффициентов в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} P_{p-s}(t) \\ Q_{p-s}(t) \\ \vdots \\ R_{p-s}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $P_{p-s}(t), Q_{p-s}(t), \dots, R_{p-s}(t)$ — многочлены степени $p - s$.

После подстановки этого столбца в систему (2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях t должна получиться система уравнений для определения коэффициентов многочленов, общее решение которой зависит от p произвольных констант, что и даёт нам p ЛНЗ ЧР уравнения (2).

Пример 3. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

Здесь $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найдём корни ХУ:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Имеем единственный корень $\lambda = 1$ кратности $p = 2$. Определим количество ЛНЗ СВ. Если T — СВ, то он удовлетворяет уравнению

$$(A - \lambda E)T = \theta,$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} T = \theta.$$

Поскольку ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ равен $r = 1$, то число ЛНЗ СВ равно $n - r = 2 - 1 = 1$.

Значит, геометрическая кратность СВ $\lambda = 1$ равна $s = 1$, и мы должны искать ЧР в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ Q_1(t) \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} e^t.$$

Подставив $x(t) = (at + b)e^t, y(t) = (ct + d)e^t$ в исходную систему ОДУ, получим:

$$\begin{cases} (at + a + b)e^t = 2(at + b)e^t - (ct + d)e^t, \\ (ct + c + d)e^t = (at + b)e^t. \end{cases}$$

Сократив на e^t и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t , получим систему:

$$\begin{cases} a = 2a - c, \\ a + b = 2b - d, \\ c = a, \\ c + d = b, \end{cases}$$

которая имеет ОР: $c = a, b = a + d, a$ и d — произвольные. При $a = 1, d = 0$ получаем ЧР

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} t + 1 \\ t \end{pmatrix} e^t,$$

при $a = 0, d = 1$ получаем ЧР

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

ФСР системы состоит из двух ЛНЗ ЧР: $X_1(t), X_2(t)$. Тогда ОР исходной системы:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} t + 1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} C_1 t + C_1 + C_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} e^t,$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = (C_1 t + C_1 + C_2) e^t, \\ y = (C_1 t + C_2) e^t, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Для нахождения ОР системы (2) также можно воспользоваться следующей формулой (это особенно удобно в случае кратных корней). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — корни ХУ (3) кратности p_1, \dots, p_m , соответственно. Тогда ОР системы (2) имеет вид

$$X(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{p_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} B_j^k \right) T_j e^{\lambda_j t}, \quad (4)$$

где $B_j = A - \lambda_j E$, T_j — ОР уравнения $B_j^{p_j} T_j = \theta$ (корневой вектор матрицы A). Заметим, что в случае $p_j = 1$ корневой вектор T_j удовлетворяет уравнению $(A - \lambda_j E) T_j = \theta$, т. е. T_j состоит из собственных векторов и нулевого вектора.

Пример 4. Решим систему из примера 3: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$ с помощью формулы (4).

ХУ имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности $p = 2$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

корневой вектор $T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которое имеет общее решение $T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, где b_1, b_2 — произвольные. Тогда ОР исходной системы ДУ:

$$X(t) = \frac{t^0}{0!} \underbrace{B^0}_E \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t + \frac{t^1}{1!} B^1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t + t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} b_1 + b_1 t - b_2 t \\ b_2 + b_1 t - b_2 t \end{pmatrix} e^t,$$

$$b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Это решение совпадает с решением, полученным в примере 3, с точностью до обозначения произвольных констант.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = (C_1 + C_1 t - C_2 t) e^t, \\ y = (C_2 + C_1 t - C_2 t) e^t, \end{cases} C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Операционный метод (преобразование Лапласа).

ДЗ 7. Филиппов № 786, 802, 803, 805, 808, 811, 812, 858.

Дополнение

5. Матричная экспонента. Рассмотрим однородную систему (2). Её общим решением является функция

$$X(t) = e^{tA} C. \quad (5)$$

Здесь $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ — столбец произвольных констант, e^{tA} — матричная экспонента. Она

определяется как сумма ряда:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k = E + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \dots,$$

где каждое слагаемое — матрица размера $n \times n$. Тогда e^{tA} — тоже матрица размера $n \times n$. Можно показать, что она обладает основными свойствами экспоненты:

$$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A} e^{t_2A} = e^{t_2A} e^{t_1A},$$

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA},$$

$$e^{0 \cdot A} = E.$$

Из равенства $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$ следует, что функция (5) действительно является решением системы (2).

Для того чтобы вычислить матричную экспоненту e^{tA} , не нужно суммировать бесконечный ряд. Дело в том, что ЛП матриц размера $n \times n$ конечномерно: его размерность n^2 , поэтому среди матриц E, A, A^2, A^3, \dots есть не более n^2 ЛНЗ матриц, а остальные можно выразить через них. На самом деле их не более n , и из теоремы Гамильтона—Кэли следует формула (см. Э. Б. Винберг. Курс алгебры):

$$e^{tA} = P(A),$$

где P — интерполяционный многочлен степени не выше $n - 1$ с n неизвестными коэффициентами. Его коэффициенты определяются из условий:

$$\left[\frac{d^k}{d\lambda^k} (e^{t\lambda}) \right] \Big|_{\lambda=\lambda_j} = P^{(k)}(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, p_j - 1,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — корни ХУ (3) кратности p_1, \dots, p_m , соответственно.

Пример 5. Решим систему из примеров 1, 2:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i, \quad p_1 = p_2 = p_3 = 1, \quad n = 3.$$

Интерполяционный многочлен ищем в виде:

$$P(\lambda) = \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma.$$

Коэффициенты α, β, γ находятся из условий:

$$e^{t\lambda_j} = P(\lambda_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

$$\begin{cases} e^t = \alpha + \beta + \gamma, \\ e^{it} = -\alpha + \beta i + \gamma, \\ e^{-it} = -\alpha - \beta i + \gamma. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} e^t = \alpha + \beta + \gamma, \\ \cos t = \gamma - \alpha, \\ \sin t = \beta. \end{cases}$$

Окончательно:

$$\beta = \sin t, \quad \gamma = \frac{e^t + \cos t - \sin t}{2}, \quad \alpha = \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2}.$$

$$e^{tA} = P(A) = \alpha A^2 + \beta A + \gamma A^0 = \alpha A^2 + \beta A + \gamma E.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \\
&= \frac{e^t - \cos t - \sin t}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \frac{e^t + \cos t - \sin t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2 \sin t & 2 \sin t \\ -e^t + \cos t - \sin t & e^t - 2 \sin t & 2 \sin t \\ -e^t + \cos t - 2 \sin t & e^t - \cos t - 3 \sin t & \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ОР исходной системы:

$$\begin{aligned}
X(t) = e^{tA}C &= \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2 \sin t & 2 \sin t \\ -e^t + \cos t - \sin t & e^t - 2 \sin t & 2 \sin t \\ -e^t + \cos t - 2 \sin t & e^t - \cos t - 3 \sin t & \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} C_1 \cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2) \sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + C_1 \cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2) \sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + (C_1 - C_2 + C_3) \cos t + (3C_3 - 2C_1 - 3C_2) \sin t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Оно совпадает с полученными в примерах 1, 2 с точностью до обозначения произвольных констант.

$$\text{Ответ: } X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2) \sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + C_1 \cos t + (2C_3 - C_1 - 2C_2) \sin t \\ (C_2 - C_1)e^t + (C_1 - C_2 + C_3) \cos t + (3C_3 - 2C_1 - 3C_2) \sin t \end{pmatrix},$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Пример 6. Решим систему из примеров 3, 4:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1, \quad p = 2, \quad n = 2.$$

Интерполяционный многочлен ищем в виде:

$$P(\lambda) = \alpha\lambda + \beta.$$

Коэффициенты α, β определяются из условий:

$$\begin{cases} e^t = P(1), \\ \left[\frac{d}{d\lambda} (e^{t\lambda}) \right] \Big|_{\lambda=1} = P'(1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^t = \alpha + \beta, \\ te^t = \alpha. \end{cases}$$

$$te^t = \alpha.$$

Отсюда $\alpha = te^t, \beta = (1-t)e^t$.

$$e^{tA} = P(A) = \alpha A + \beta E = te^t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (1-t)e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix}.$$

ОР исходной системы:

$$X(t) = e^{tA}C = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1-t)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_1t - C_2t)e^t \\ (C_2 + C_1t - C_2t)e^t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Оно совпадает с полученным в примере 4.

$$\text{Ответ: } X(t) = \begin{pmatrix} (C_1 + C_1t - C_2t)e^t \\ (C_2 + C_1t - C_2t)e^t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$