СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. МНОЖЕСТВА.
ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

1.1. Множества и их элементы

Множество — одно из основных понятий современной математики. Это понятие не сводится к другим понятиям и не определяется. Вместо определения приведем несколько примеров множеств:

1) множество действительных чисел;

2) множество точек плоскости;

3) множество букв русского алфавита;

4) множество деревьев в лесу;

5) множество учащихся данного класса.

Когда в математике говорят о множестве, то понимают под этим совокупность предметов (объектов), объединенных в одно целое по некоторому признаку. Один из основоположников современной теории множеств немецкий математик Георг Кантор (1845–1918 гг.) выразил эту мысль следующим образом: «Множество есть многое, мыслимое как единое целое».

Предметы (объекты), составляющие множество, называют его *элементами*. Множества обозначают заглавными латинскими буквами: A, B, C, X, … их элементы — прописными буквами: a, b, c, x, … или буквами с индексами a_1, a_2, ...

Предложение «объект a является элементом множества A» записывается $a \in A$ (читается: a принадлежит A), если же a не является элементом множества A, то это записывают так $a \notin A$. Например, A — множество четных чисел. Тогда $2 \in A$, $1028 \in A$, $5 \notin A$, $0{,}8 \notin A$.

В повседневной жизни слово «множество» обычно связывают с большим количеством предметов. В математике можно рассматривать множества, содержащие 3, 2, 1 элемент, а также множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называют *пустым* и обозначают $\varnothing$. Примерами пустых множеств являются множество нечетных чисел, делящихся на 2; множество сооружений на земле высотой более 1000 м и т.д. Если множество содержит конечное число элементов, то его называют *конечным*, а если в нем бесконечно много элементов, то *бесконечным*. Так, множество жителей г. Томска конечно, а множество точек на отрезке бесконечно.

Упражнения

1. Приведите примеры множеств, которые встречаются в жизненных ситуациях.

2. Как называется:

а) множество птиц;

б) множество лошадей;

в) множество людей в поезде;

г) множество артистов, работающих в одном театре.

3. Назовите несколько элементов, принадлежащих множеству:

а) чисел, кратных 7;

б) квадратов натуральных чисел;

в) простых чисел, принадлежащих промежутку [25; 43];

г) чисел, обратных кубам натуральных чисел.

4. Пусть A — множество простых чисел вида $7n + 2$, где $n \in \mathbf{N}$. Верна ли запись:

а) $9 \in A$; б) $23 \in A$; в) $31 \notin A$; г) $37 \notin A$.

5. Пусть B — множество корней уравнения $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$. Верна ли запись:

а) $0 \in B$; б) $-3 \notin B$; в) $4 \in B$; г) $3 \notin B$.

1.2. Способы задания множеств

Чтобы задать множество, необходимо знать, какие объекты принадлежат множеству, а какие нет. Если множество содержит немного элементов, то его можно задать, перечислив все его элементы. Например, множество учеников класса — список в классном журнале, множество стран — список в географическом атласе.

Если множество задано списком, то его элементы записывают в фигурных скобках через точку с запятой. Множество цифр можно записать следующим образом $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0\}$.

Однако задать множество списком можно только тогда, когда оно содержит конечное число элементов (но и это неудобно, если число элементов множества велико). Существует универсальный способ задания множеств (в том смысле, что таким способом можно задать любое множество). Множество может быть задано с помощью *характеристического свойства*, то есть такого свойства, которым обладают все элементы множества, и не обладают объекты, не принадлежащие множеству (записывают: $A = \{x \mid P(x)\}$, где $P(x)$ — характеристическое свойство).

Приведем несколько примеров:

1. Пусть A — множество остатков от деления натуральных чисел на 5, тогда $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

2. Если $B = \{n \mid n \in \mathbf{N}, 3 \le n \le 12\}$ — множество натуральных чисел, заключенных между 3 и 12, то $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

3. Если $D = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -3 \le x \le 4\}$, то D — отрезок $[-3; 4]$.

4. Если $X = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ — множество корней квадратного уравнения, то $X = \{1; 2\}$.

Рассмотрим множество $A = \left\{ \dfrac{n}{n^2 - 2} \;\middle|\; n \in \mathbf{N} \right\}$ и выясним, принадлежат ли числа $\dfrac{1}{4}; \dfrac{2}{7}$ этому множеству. Число $\dfrac{1}{4} \in A$, если существует такое натуральное число n, что $\dfrac{n}{n^2 - 2} = \dfrac{1}{4}$. Для проверки этого решим уравнение $\dfrac{n}{n^2 - 2} = \dfrac{1}{4}$.

Имеем $n^2 - 4n - 2 = 0$, откуда $n_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$.

Так как числа $2 \pm \sqrt{6}$ не являются натуральными, то $\dfrac{1}{4} \notin A$.

Аналогично, решая уравнение $\dfrac{n}{n^2 - 2} = \dfrac{2}{7}$, имеем $2n^2 - 7n - 4 = 0$, откуда $n_1 = 4; n_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Так как $4 \in \mathbf{N}$ и $\dfrac{2}{7} = \dfrac{4}{4^2 - 2}$, получаем, что $\dfrac{2}{7} \in A$.

<u>Упражнения</u>

1. Задайте перечислением элементов множество, заданное характеристическим свойством:

а) $A = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$;

б) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, 2 < x \le 8\frac{2}{5}\}$;

в) $C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$;

г) $D = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -5 < x^3 + 1 < 20\}$;

д) $E = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0\}$;

е) $F = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, |x| < 5\}$;

ж) $P = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -4 < x < 6\}$;

з) $Q = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n < 20, n - \text{простое}\}$;

и) $S = \left\{n \mid n \in \mathbf{Z}, \dfrac{n^2 - 2n + 5}{(n-1)^2} - \text{целое}\right\}$;

к) $T = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -x^2 + x + 6 \ge 0\}$.

2. В данном множестве все элементы, кроме одного, обладают некоторым свойством. Опишите это свойство и найдите элемент, не обладающий им.

а) {сумма; разность; множитель; частное};

б) {4; 16; 22; 27; 30; 34};

в) {1; 15; 16; 25; 64; 121};

г) {синий; красный; круглый; бежевый; зеленый};

д) {4; 6; 12; 81; 441; 1113};

е) {Обь; Иртыш; Волга; Байкал; Ангара; Амур};

ж) $\left\{\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{11}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{5}{4}; \dfrac{9}{16}; \dfrac{2}{9}\right\}$;

з) {шар; пирамида; параллелограмм; цилиндр; конус}.

3. Исследуйте, принадлежат ли числа $\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}$ множеству $A = \left\{ \frac{3-2n}{n^2+n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N} \right\}$.

4. Определите, по какому закону составлено бесконечное множество, содержащее числа:

а) $\left\{6;\ 2;\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{9};\ \ldots\right\}$;

б) $\left\{ \frac{1}{5};\ \frac{3}{8};\ \frac{5}{11};\ \frac{7}{14};\ \frac{9}{17};\ \ldots\right\}$;

в) $\left\{ \frac{3}{4};\ \frac{8}{9};\ \frac{15}{16};\ \frac{24}{25};\ \frac{35}{36};\ \ldots\right\}$;

г) $\{2;\ 6;\ 12;\ 20;\ 30;\ \ldots\}$;

д) $\left\{\frac{3}{7};\ \frac{5}{11};\ \frac{7}{15};\ \frac{9}{19};\ \ldots\right\}$;

е) $\{4;\ 18;\ 48;\ 100;\ 180;\ \ldots\}$.

5. Задайте характеристическим свойством множества:

а) всех правильных многоугольников;

б) параллельных прямых;

в) всех натуральных чисел, кратных 5.

6. Какие из следующих множеств пустые:

а) множество корней уравнения $|x - 7| = 7$;

б) множество прямых плоскости, перпендикулярных двум пересекающимся прямым;

в) множество решений неравенства $(x-10)^2 \le 0$;

г) множество корней уравнения $|9 - 5x| = -3$;

д) множество отрицательных корней уравнения $|x| = -x$.

Ответы:

1. а) $A = \{-4; 2\}$; б) $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$; в) $C = \{1; 2\}$; г) $D = \{-1; 0; 1; 2\}$; д) $E = \{(1; -2)\}$; е) $F = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; ж) $P = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; з) $Q = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$; и) $S = \{-1; 0; 2; 3\}$; к) $T = \{1; 2; 3\}$.

2. а) результаты арифметических действий; множитель; б) четные числа; 27; в) квадраты чисел; 15; г) прилагательные, определяющие цвет; круглый; д) кратны трем; 4; е) реки; Байкал; ж) правильные дроби; $\frac{5}{4}$; з) пространственные тела; параллелограмм.

3. $\frac{1}{2} \in A$; $-\frac{1}{8} \notin A$; $-\frac{1}{4} \in A$.

4. а) $a_n = \frac{6}{3^{n-1}}, n \in \mathbf{N}$; б) $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}, n \in \mathbf{N}$;

в) $a_n = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbf{N}$; г) $a_n = n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}$;

д) $a_n = \frac{2n+1}{4n+3}$, $n \in \mathbf{N}$; е) $a_n = n(n+1)^2$, $n \in \mathbf{N}$.

5. а) многоугольники с равными сторонами и равными углами; б) прямые, не имеющие общих точек; в) $\{5n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

6. б) $\varnothing$; г) $\varnothing$.

1.3. Подмножества

Рассмотрим два множества A и B. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то говорят, что A — *подмножество* множества B (рис. 1). Этот факт записывают $A \subset B$. Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества. Каждое непустое множество A имеет хотя бы

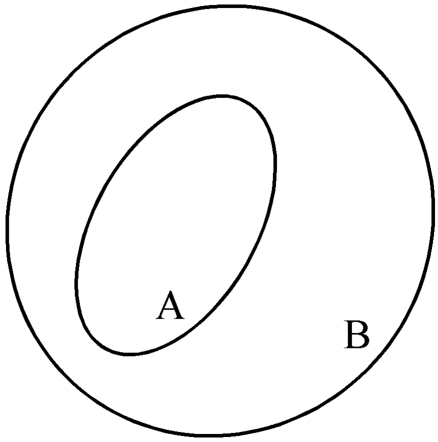


Рис. 1.

два подмножества — само множество A и пустое множество. Их называют *несобственными* подмножествами множества A, все другие подмножества, если они существуют, — *собственными*.

Если A — подмножество множества B, B — подмножество множества C ($A \subset B$ и $B \subset C$), то A — подмножество множества C ($A \subset C$), то есть свойство быть подмножеством удовлетворяет условию транзитивности.

Примеры множеств и их подмножеств:

1) Пусть **N** — множество натуральных чисел, **Z** — множество целых чисел, **Q** — множество рациональных чисел, **R** — множество действительных чисел. Тогда $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2) Пусть A — множество букв русского алфавита, B — множество гласных букв русского алфавита, тогда $B \subset A$.

3) Пусть A — множество линий на плоскости, B — множество прямых на плоскости, то $B \subset A$.

Если множество B является подмножеством множества A ($B \subset A$), то принадлежность элемента x множеству B является *достаточным* условием его принадлежности множеству A, а принадлежность элемента x множеству A — необходимым условием его принадлежности множеству B.

Например, если A — множество всех параллелограммов, а B — множество всех прямоугольников, то $B \subset A$. Поэтому, для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, т.е. принадлежал множеству A, достаточно чтобы он был прямоугольником, т.е. принадлежал множеству B. С другой стороны, для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы он являлся параллелограммом.

Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B *равны*, т.е. состоят из одних и тех же элементов. В этом случае принадлежность элемента множеству A необходима и достаточна для его принадлежности множеству B. Многие теоремы математики можно рассматривать как утверждения о равенстве множеств.

<u>Упражнения</u>

1. Составьте цепочки включений, так чтобы каждое следующее множество содержало предыдущее.

а) A — множество всех позвоночных;

B — множество всех животных;

C — множество всех волков;

D — множество всех млекопитающих;

E — множество всех хищных млекопитающих.

б) A — множество всех трапеций;

B — множество всех прямоугольников;

C — множество всех четырехугольников;

D — множество всех квадратов;

E — множество всех параллелограммов;

F — множество всех многоугольников.

2. Даны множества: A — множество целых чисел; B — множество четных чисел; C — множество нечетных чисел; D — множество чисел, кратных 3; E — множество чисел, кратных 6; P — множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно; T — множество чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других множеств, имеются ли среди множеств равные множества? Ответы запишите с помощью символов.

3. Назовите 3 подмножества: а) множества треугольников на плоскости; б) множества чисел, оканчивающихся нулем; в) множества уравнений.

4. Придумайте примеры цепочек, состоящих из множеств и их подмножеств и содержащих не менее трех включений.

Ответы:

1. а) $C \subset E \subset D \subset A \subset B$; б) $D \subset B \subset E \subset C \subset F$, $A \subset C \subset F$.

2. Все множества являются подмножествами множества A; $E \subset D$, $E \subset B$, $P = E$ (следовательно, $P \subset D$, $P \subset B$), $T \subset C$.

1.4. Пересечение множеств

Пусть даны два множества A и B.

Пересечением (*произведением*) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству A, и множеству B. Обозначают пересечение множеств $A \cap B$. $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Аналогично определяется пересечение любого числа множеств. Графически удобно пересечение множеств изображать в виде общей части двух или более кругов Эйлера–Венна (рис. 2).

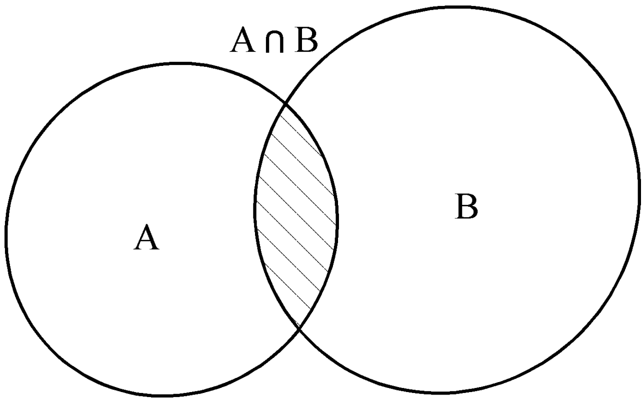


Рис. 2.

Примеры

1. $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — множество чисел, делящихся на 2, $B = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — множество чисел, делящихся на 3, тогда $A \cap B = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$ — множество чисел, делящихся на 6.

2. A — отрезок [0; 5], B — отрезок [2; 7], тогда $A \cap B$ — отрезок [2; 5].

Упражнения

1. Найдите $A \cap B$, если

а) $A = (–3; 7)$, $B = (1; 8)$;

б) $A = [0; 5]$, $B = [5; 8]$;

в) $A = (–\infty; +\infty)$, $B = (–1; 9)$;

г) A — множество простых чисел, B — множество положительных четных чисел;

д) A — множество всех прямоугольников, B — множество всех ромбов;

е) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \geq 10\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 16\}$;

ж) $A = \{x \mid n \in \mathbf{N}, x = n^2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 40\}$;

з) A — множество чисел, кратных 18, B — множество чисел, кратных 24;

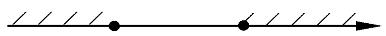
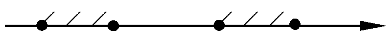
и) $A = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{5n \mid n \in \mathbf{N}\}$;

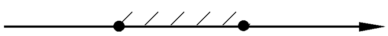
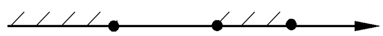
к) $A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{4n + 3 \mid n \in \mathbf{N}\}$;

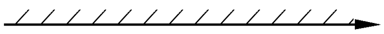
л) $A = \{3n + 2 \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$.

2. Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B — из целых чисел, оканчивающихся нулем и множество C — из целых чисел, делящихся на 75. Из каких чисел состоит множество $A \cap B \cap C$.

3. Определите, какие из предложенных вариантов могут изображать пересечение множеств решений двух квадратных неравенств? В случае положительного ответа приведите примеры таких неравенств.

а)  б) 

в)  г) 

д) 

4. Изобразите с помощью кругов Эйлера–Венна пересечение множеств A и B для всевозможных случаев их взаимного расположения.

Ответы:

1. а) (1; 7); б) {5}; в) (–1; 9); г) {2}; д) множество квадратов; е) {10; 11; 12; 13; 14; 15; 16}; ж) {1; 4; 9; 16; 25; 36}; з) числа, кратные 72; и) $\{15n \mid n \in \mathbf{N}\}$; к) $\{4n + 3 \mid n \in \mathbf{N}\}$; л) $\{12n - 7 \mid n \in \mathbf{N}\}$.

2. $A \cap B \cap C = \{300n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

3. а), б), в), д).

1.5. Объединение множеств

Объединением двух множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Обозначают объединение множеств $A \cup B$ (рис. 3).

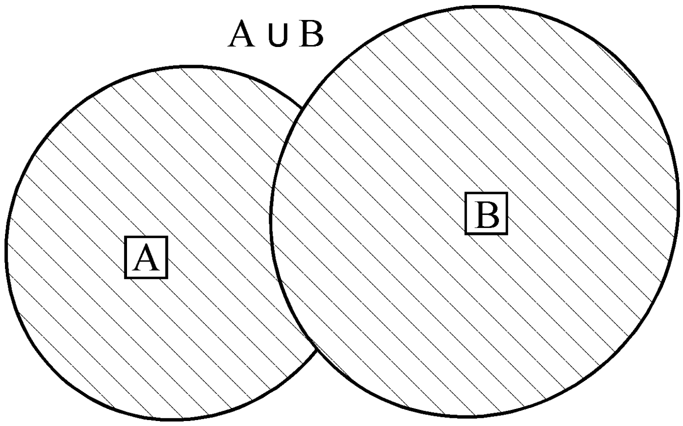


Рис. 3.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Аналогично определяется объединение любого числа множеств.

Примеры

1. $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$, тогда $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\}$.

2. $A = [0; 7]$, $B = [3; 10]$, тогда $A \cup B = [0; 10]$.

3. $A = \{6k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, кратные 6, $B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, дающие при делении на 6 остаток 2, $C = \{6k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — числа, дающие при делении на 6 остаток 4. Перечислим некоторые элементы этих множеств:

$A = \{\dots, -6; 0; 6; 12; \dots\}$, $B = \{\dots, -4; 2; 8; 14; \dots\}$,

$C = \{\dots, -2; 4; 10; 16; \dots\}$.

Очевидно, что $A \cup B \cup C = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ — множество четных чисел.

<u>Упражнения</u>

1. Пусть $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$, $C = \{x \mid -4 \le x < 5\}$. Запишите следующие множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A \cap \mathbf{N}$, $A \cup \mathbf{N}$, $B \cup \mathbf{Z}$, $(A \cap B) \cap \mathbf{N}$.

2. Пусть заданы множества A, B и C такие, что $A \cap B = \{2; 3\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 8\}$, $A \cap C = \{1\}$, $C \cup B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8\}$. Найдите множества A, B и C.

3. Найдите объединение множеств:

а) $A = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{3k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$;

б) $A = \{8k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{8k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$;

в) $A = \{9k + 7 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{9k + 4 \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $C = \{9k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

4. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$, если

а) $A = \{x \mid x^4 - 13x^2 + 36 = 0\}$, $B = \{x \mid x^4 - 8x^2 + 9 = 0\}$;

б) $A = \{x \mid 3x - 9 < 0\}$, $B = \{x \mid 2x + 6 > 0\}$.

5. Какое заключение можно сделать об отношении между фигурами, расположенными так, что их пересечением и их объединением служит одна и та же фигура?

Ответы:

2. Например, $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{2; 3; 5; 7; 8\}$; $C = \{1; 6; 7; 8\}$.

3. а) $A \cup B \cup C = \mathbf{Z}$; б) $A \cup B = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$;

в) $A \cup B \cup C = \{3k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

4. а) $A \cup B = \{-1; -2; -3; 1; 2; 3\}$, $A \cap B = \{-3; 3\}$;

б) $A \cup B = \mathbf{R}$, $A \cap B = (-3; 3)$.

5. Они равны.

1.6. Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, множества A, не принадлежащих множеству B. Обозначают разность множеств $A \setminus B$ (рис. 4).

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

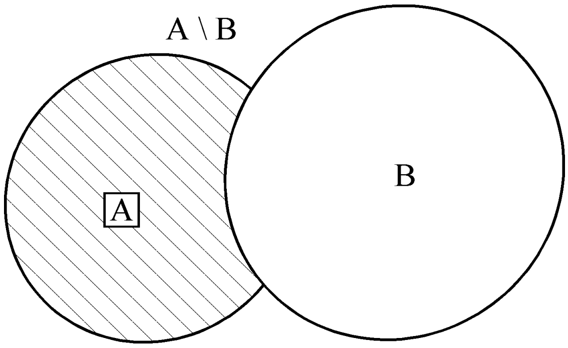


Рис. 4.

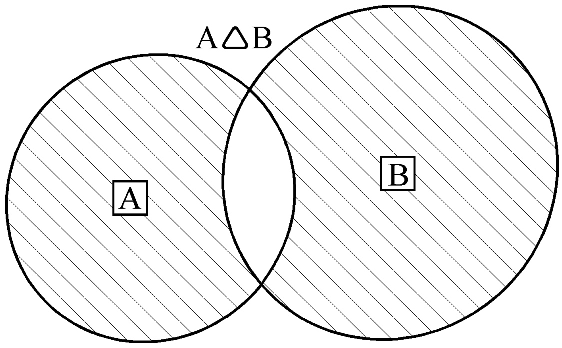


Рис. 5.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих только одному множеству A или B, обозначают $A \triangle B$ (рис. 5).

Часто при решении задач вводят *универсальное* множество U — это самое большое множество элементов, рассматриваемых в задаче.

Дополнением множества A до универсального называется множество элементов универсального множества, не принадлежащих множеству A. Обозначают дополнение множества $\overline{A}$ (рис. 6).

$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$

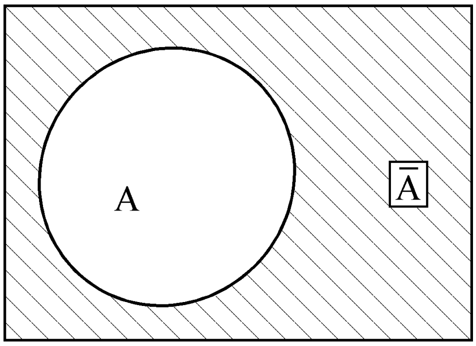


Рис. 6.

Примеры

1. $A = [-2; 0)$, $B = [-1; 3)$. Тогда $A \setminus B = [-2; -1)$, а $B \setminus A = [0; 3)$.

2. $A = \{2m - 1 \mid m \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

$A = \{\ldots; -3; -1; 1; 3; \ldots\}$, $B = \{\ldots; -3; 1; 5; 9; \ldots\}$,

$A \setminus B = \{\ldots; -1; 3; 7; \ldots\}$,

$A \setminus B = \{4k - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Упражнения

1. Найдите $A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:

а) $A = [-11; 4]$, $B = (2; 8]$;

б) $A = [2; 7]$; $B = [8; 12]$;

в) $A = (-\infty; 5]$; $B = (1; +\infty)$.

2. Найдите $A \setminus B$:

а) $A = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{6m \mid m \in \mathbf{Z}\}$;

б) $A = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{4m + 2 \mid m \in \mathbf{Z}\}$.

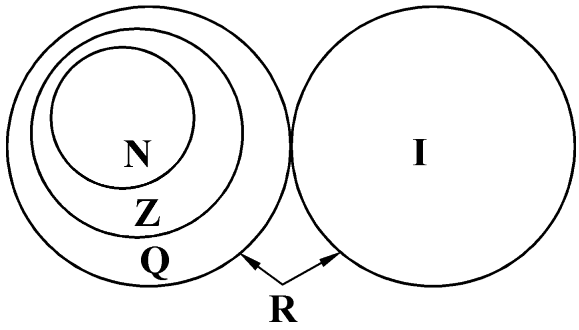
3. Найдите дополнение множества остроугольных треугольников до множества всех треугольников.

4. Докажите, что симметрическую разность можно определить с помощью формул: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ или $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.

Ответы: **2**. а) $A \setminus B = \{6k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$; б) $A \setminus B = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

1.7. Числовые множества

Элементами множества могут быть объекты различной природы (числа, слова, геометрические фигуры, функции, животные и т.д.). Для математики особую роль играют множества, составленные из математических объектов. Очень часто встречаются *числовые множества*, т.е. множества, элементами которых являются числа.



Например:

N — множество натуральных чисел,

Z — множество целых чисел,

Q — множество рациональных чисел,

I — множество иррациональных чисел,

R — множество действительных чисел.

Особое место занимают множества, называемые числовыми промежутками: отрезок $[a; b]$, интервалы $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, полуинтервалы $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$.

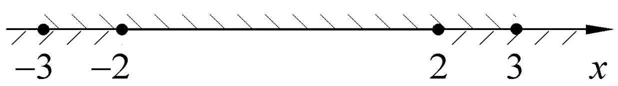
Числовые множества используются при решении уравнений и неравенств.

<u>Примеры</u>

1. Найдем множество допустимых значений переменной для уравнения

$$\sqrt{9-x^2}+\sqrt{x^2-4}=2.$$

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ x^2-4 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| \leq 3, \\ |x| \geq 2, \end{cases}$$



Ответ: $[-3; -2] \cup [2; 3]$.

2. Совпадают ли множества корней уравнений

$(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}=0$ и $(x-2)(x^2-2x-3)=0$?

Рассмотрим первое уравнение $(x-2)\sqrt{x^2-2x-3}=0$.

Область допустимых значений переменной (ОДЗ):

$(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Решим уравнение:

$$\left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ \sqrt{x^2-2x-3}=0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=2 \notin \text{ОДЗ}, \\ x=-1, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Корни: –1; 3.

Корнями же второго уравнения являются числа –1; 2; 3. Поэтому множества корней данных уравнений различны.

<u>Упражнения</u>

1. Найдите множество значений переменной, при которых имеет смысл уравнение:

а) $x^2-3x+\frac{2}{4-x^2}=\frac{1}{x}$;

б) $\sqrt{6x-x^2-8}=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$;

в) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-\sqrt{\frac{x+7}{x+5}}=0$.

2. Совпадают ли множества корней уравнений:

а) $\frac{x^2-3x-4}{x-1}=0$ и $x^2-3x-4=0$;

б) $|x-3|=3-x$ и $x-3=0$;

в) $x^2-4x=0$ и $|2x-6|-|x-6|=0$;

г) $x^2-6x+9=0$ и $\dfrac{2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{1}{x(x+2)}$;

д) $\sqrt{(x-1)(x+5)}=\sqrt{7}$ и $\sqrt{x-1}\sqrt{x+5}=\sqrt{7}$?

3. Совпадают ли множества точек плоскости, заданные уравнениями:

а) $y=\dfrac{x(x+2)}{x}$ и $y = x + 2$;

б) $x^2+y^2=25$ и $y=\sqrt{25-x^2}$;

в) $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{|x|}$?

4. С точки зрения теории множеств определите связь между множествами решений уравнений:

а) $y - x = 0$; б) $xy - 1 = 0$; в) $(y - x)(xy - 1) = 0$;

г) $(y-x)^2+(xy-1)^2=0$; д) $\dfrac{y-x}{xy-1}=0$; е) $\dfrac{xy-1}{y-x}=0$.

Ответы:

1. а) $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$; б) $x \in (3; 4]$;

в) $x \in [-7; -5) \cup (-5; 2] \cup (1; +\infty)$.

2. а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

3. а) нет; б) нет; в) нет.

1.8. Алгебра множеств

Алгеброй множеств называется часть теории множеств, в которой изучаются свойства операций над множествами. Рассмотрим некоторые из них:

1. Свойство коммутативности объединения и пересечения

   $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

2. Свойство ассоциативности объединения и пересечения

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. Свойство дистрибутивности пересечения относительно объединения и наоборот

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

5. $A \cup U = U$; $A \cap U = A$;

6. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$;

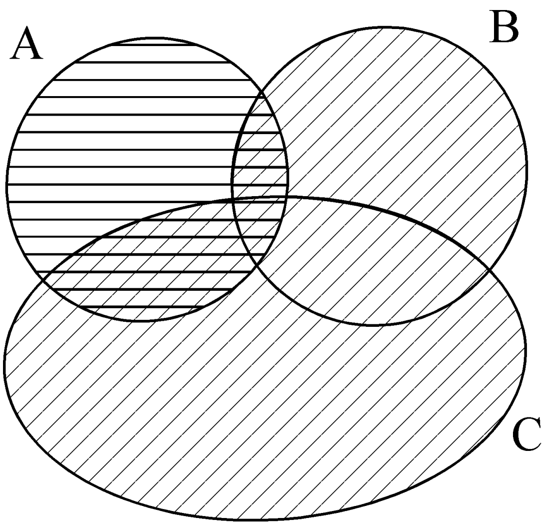
7. $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

8. $\overline{\overline{A}} = A$;

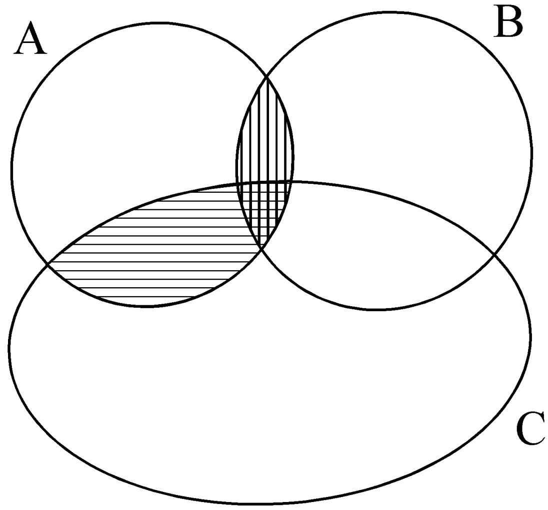
9. $\overline{U} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = U$;

10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. (законы де-Моргана или формулы двойственности).

Проиллюстрируем с помощью диаграмм Эйлера–Венна, например, свойство 3. Рассмотрим отдельно левую и правую части равенства (рис. 7, *а* и *б*). На рисунке 7, *а* нас интересует множество, отмеченное двойной штриховкой, а на рисунке 7, *б* — множество, выделенное хотя бы одной штриховкой.



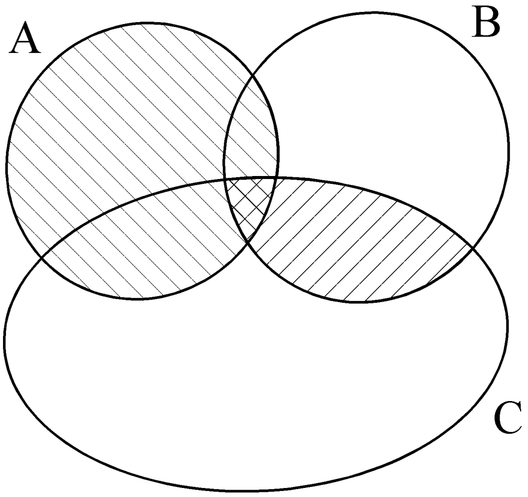
а



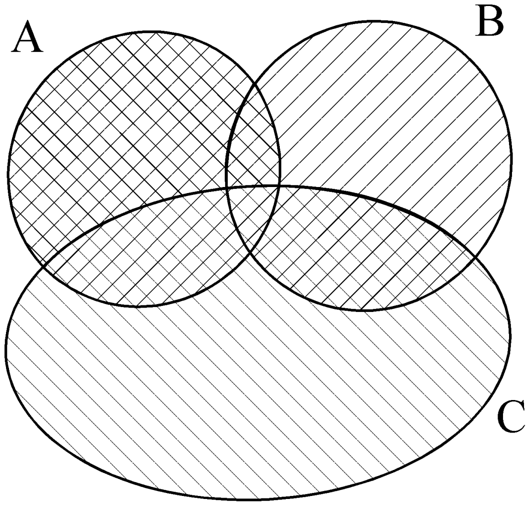
б

Рис. 7.

Левую часть второго равенства определяет множество, отмеченное хотя бы одной штриховкой (рис. 8, *а*). Правую — множество, отмеченное двойной штриховкой (рис. 8, *б*).



а



б

Рис. 8.

Пример 1. Докажите тождество

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Решение. Докажем два включения

$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ и $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C)$.

Построим цепочку следующих друг из друга утверждений

$x \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \notin (B \cup C) \Rightarrow x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow$

$x \in A \setminus B, x \in A \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Проверим обратное включение $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Rightarrow$

$x \in A \setminus B, x \in A \setminus C \Rightarrow x \in A, x \notin B, x \notin C \Rightarrow x \in A, x \notin (B \cup C) \Rightarrow$

$x \in A \setminus (B \cup C)$.

Равенство множеств доказано.

<u>Пример 2.</u> Упростите выражение $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}$.

Решение. Имеем $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}} = \overline{\overline{A \cap B \cap C}} = A \cap B \cap C$.

<u>Пример 3.</u> Упростите выражение

$((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A)$.

Решение.

1) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) = A \cup B$, т.к. $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$;

2) $(A \cup (B \setminus C)) \cap A = A$;

3) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$.

Итак, $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) \setminus ((A \cup (B \setminus C)) \cap A) = B \setminus A$.

<u>Упражнения</u>

1. Доказать, что для любых множеств A и B справедливы равенства:

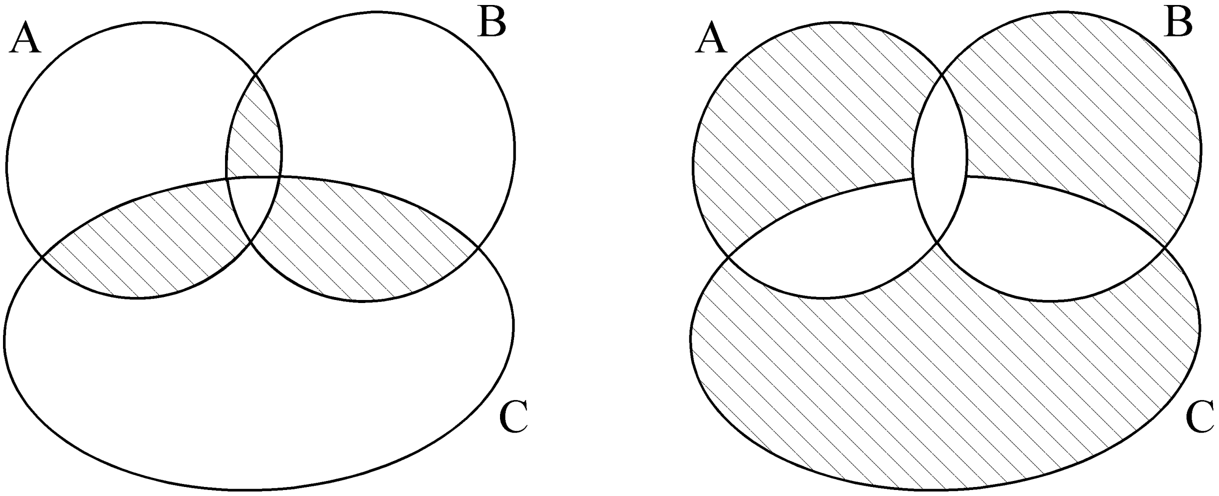
а) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;

б) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

2. Упростите выражение

$(A \cap (B \cup A) \cup C) \setminus (A \cup (B \cup A) \cap C \setminus A)$.

3. Запишите с помощью формул заштрихованное множество:



а *б*

Рис. 9.

4. Покажите с помощью диаграмм Эйлера–Венна, что

$$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cup (B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)].$$

Ответы:

2. A.

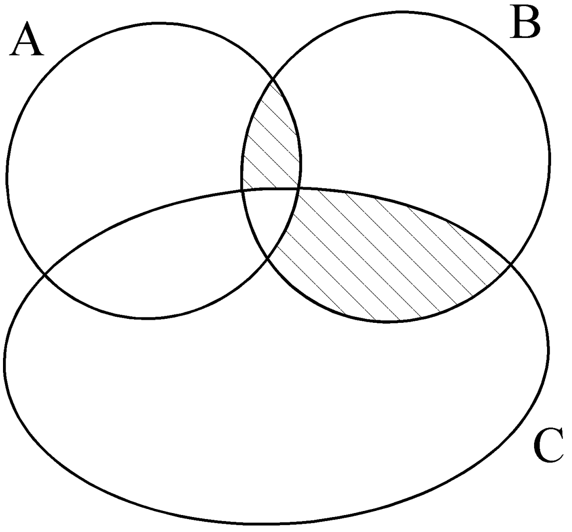
3. Ввиду неоднозначности записи ответы приводятся примерные:

а) $[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A] \cup [(A \cap C) \setminus B]$ или

$[(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)] \setminus [A \cap B \cap C]$;

б) $[A \setminus (B \cup C)] \cup [B \setminus (A \cup C)] \cup [A \cap B \cap C]$.

4.



§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

С объединением и пересечением множеств мы имеем дело при решении уравнений, неравенств и их систем. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите неравенство $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Решением этого неравенства является объединение двух множеств $(-\infty; -2) \cup (5; \infty)$.

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 10 < 0, \\ x + 4 > 0. \end{cases}$

Решением этой системы является пересечение двух множеств $(-\infty; 5) \cap (-4; \infty) = (-4; 5)$.

Пример 3. Найдите область определения функции $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{8 - x}$.

Ответ: $D(y) = ((-\infty; 1] \cup [3; \infty)) \cap (-\infty; 8] = (-\infty; 1] \cup [3; 8]$.

Пример 4. Решите уравнения а) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4x + 3) = 0$;

б) $(x^2 - 3x + 2)^2 + (x^2 - 4x + 3)^2 = 0$; в) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 0$.

Решение. Корни квадратных трехчленов $x^2 - 3x + 2 = 0$ и

$x^2 - 4x + 3 = 0$ образуют соответственно множества $A_1 = \{1; 2\}$ и $A_2 = \{1; 3\}$. Тогда множество решений уравнения а) это $A_1 \cup A_2 = \{1; 2; 3\}$, уравнения б) $A_1 \cap A_2 = \{1\}$, уравнения в) $A_2 \setminus A_1 = \{3\}$.

Пример 5. Решите неравенство $\dfrac{x-9}{x+3} > 0$.

Решение. Эта неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} x-9>0, \\ x+3>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-9<0, \\ x+3<0. \end{cases}$$

Решения систем находятся как пересечение множеств решения каждого неравенства системы, то есть решение первой системы — множество $(9;\infty)\cap(-3;\infty)=(9;\infty)$, решение второй системы — множество $(-\infty;-3)\cap(-\infty;9)=(-\infty;-3)$. Решение исходного неравенства — объединение полученных множеств решений $(-\infty;-3)\cup(9;\infty)$.

§ 3. ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Пусть задано конечное множество A. Число его элементов обозначим $n(A)$. Найдем сколько элементов содержится в множестве $A \cup B$. Основная формула нахождения числа элементов суммы двух множеств

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \tag{1}$$

Действительно, $n(A \cup B)$ — это сумма числа элементов множеств A и B, но при подсчете элементы, принадлежащие $A \cap B$ учитывались дважды. С помощью формулы (1) можно получить формулы для определения числа элементов суммы любого числа множеств. Например,

$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) =$

$= n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) =$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - (n(A \cap B) + n(A \cap C) -$

$- n((A \cap B) \cap (A \cap C))) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap \mathrm{C}) -$

$- n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) -$

$$- n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C). \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) называют формулами включений и исключений.

Задача 1. Из 100 школьников английский знают 42, немецкий — 30, французский — 28, английский и немецкий — 5, английский и французский — 10, немецкий и французский — 8, английский, немецкий и французский — 3 школьника. Сколько школьников не знают ни одного языка?

Решение.

Обозначим через A — множество школьников, знающих английский язык; N — множество школьников, знающих немецкий язык; F — множество школьников, знающих французский язык.

Тогда $n(A) = 42$, $n(N) = 30$, $n(F) = 28$, $n(A \cap N) = 5$,

$n(A \cap F) = 10$, $n(N \cap F) = 8$, $n(A \cap N \cap F) = 3$.

Найдем с помощью формулы включений и исключений количество школьников, знающих хотя бы один из перечисленных иностранных языков.

$n(A \cup N \cup F) = n(A) + n(N) + n(F) =$

$= n(A \cap N) - n(A \cap F) - n(N \cap F) + n(A \cap N \cap F) =$

$= 42 + 30 + 28 - 5 - 10 - 8 + 3 = 80.$

Следовательно, не знают ни одного иностранного языка: $100 - 80 = 20$ школьников.

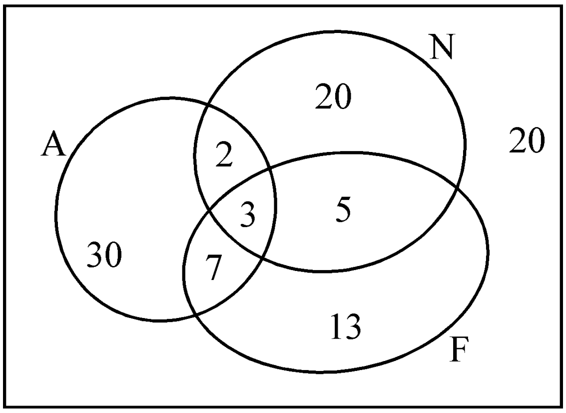


Рис. 10.

Эту же задачу можно решить с помощью диаграммы Эйлера–Венна (рис. 10).

Так как 3 языка знают 3 школьника, то английский и немецкий знают 5 – 3 = 2, английский и французский — 10 – 3 = 7, немецкий и французский — 8 – 3 = 5 школьников. Только английский знают 42 – (2 + 3 + 7) = 30, только немецкий — 30 – (2 + 3 + 5) = 20, только французский — 28 – (3 + 5 + 7) = 13 школьников. Ни одного языка не знают 100 – (2 + 3 + 5 + 7 + 13 + 20 + 30) = 20 школьников.

<u>Задача 2</u>. Сколько двузначных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Решение. Обозначим: A — множество двузначных чисел, делящихся на 2; B — множество двузначных чисел, делящихся на 3; C — множество двузначных чисел, делящихся на 5; D — множество двузначных чисел, делящихся на 11.

$n(A \cup B \cup C \cup D)$ — количество двузначных чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 2; 3; 5; 11.

$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) -$

$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) -$

$- n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) +$

$+ n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D).$

$n(A) = 45$, $n(B) = 30$, $n(C) = 18$, $n(D) = 9$,

$n(A \cap B) = 15$, $n(A \cap C) = 9$, $n(A \cap D) = 4$, $n(B \cap C) = 6$,

$n(B \cap D) = 3$, $n(C \cap D) = 1$, $n(A \cap B \cap C) = 3$,

$n(A \cap B \cap D) = 1$, $n(A \cap C \cap D) = n(B \cap C \cap D) =$

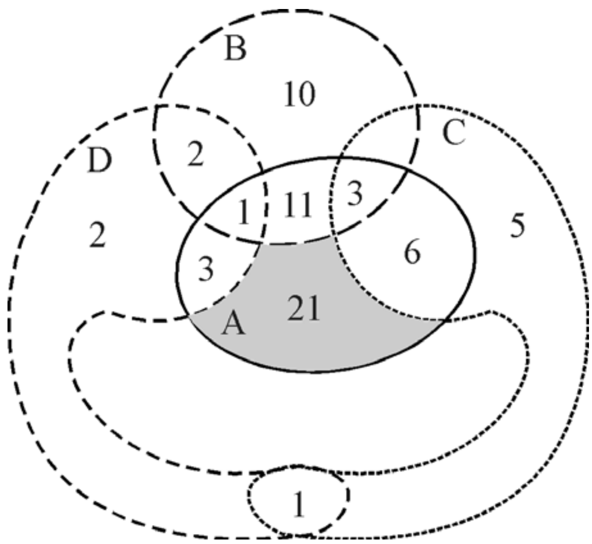
$= n(A \cap B \cap C \cap D) = 0$.

Итак, $n(A \cup B \cup C \cup D) = 45 + 30 +18 + 9 – 15 – 9 – 4 – 6 – 3 –$

$– 1 + 3 + 1 = 102 – – 34 = 68$.

Так как всего 90 двузначных чисел, то чисел, не делящихся ни на одно из заданных чисел: 80 – 68 = 22.

<u>Задача 3.</u> Сколько четных двузначных чисел, не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 11?



Решение. Учитывая обозначения, введенные в предыдущей задаче, нужно ответить на вопрос: сколько элементов попало во множество A и не попало ни в какие другие множества?

Рассмотрим диаграмму. Отметим количественные показатели в соответствующих областях в следующем порядке:

$n(A \cap B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap D) = 1$,

$n(A \cap B) – 3 – 1 = 11$, $n(A \cap C) – 3 = 6$,

$n(A \cap D) – 1 = 3$,

$n(A) – 3 – 1 – 11 – 3 – 6 = 45 – 24 = 21$.

Таким образом, только во множестве A (т.е. четных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 11) находится 21 число.

Остальные числовые данные на диаграмме служат иллюстрацией к задаче 2 (90 – (21 + 10 + 5 + 2 + 2 + 3 + 3 + 6 + 11 + 1 + 3 + + 1) = 22).

Задача 4. Учащиеся 9-х классов пошли в лес за грибами. 80 % собирали белые грибы, 70 % — моховики, 85 % — маслята, 75 % — рыжики. Сколько процентов учащихся собирали белые грибы, моховики, маслята и рыжики?

Решение. Подсчитаем, сколько учащихся собирали белые грибы и моховики: 70 % + 80 % = 150 %. Следовательно, белые грибы и моховики собирали 50 % учащихся. Аналогично, так как 50 % + 85 % = 135 %, то белые грибы, моховики и маслята собирали 35 % учащихся. Далее, имеем 35 % + 75 % = 110 %, белые грибы, моховики, маслята и рыжики собирали 10 % учащихся.

Упражнения

1. В спортивном классе обучаются 24 человека. Каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта (баскетболом или волейболом), из них баскетболом и волейболом занимаются 12 человек. Сколько человек занимается только волейболом, если их в 3 раза больше, чем тех, кто занимается только баскетболом?

2. В одном украинском городе все жители говорят на русском или украинском языке. По-украински говорят 80 % всех жителей, а по-русски — 75 %. Сколько процентов всех жителей говорят на обоих языках?

3. Группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро — фрукты, пятеро — печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое — бутерброды

и печенье, двое — фрукты и печенье, а один — и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?

4. Староста класса, в котором 40 человек, подводил итоги по успеваемости группы за I полугодие. Получилась следующая картина: из 40 учащихся не имеют троек по русскому языку 25 человек, по математике — 28 человек, по русскому языку и математике — 16 человек, по физике — 31 человек, по физике и математике — 22 человека, по физике и русскому языку 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем трем предметам. Классный руководитель, просмотрев результаты, сказал: «В твоих расчетах есть ошибка». Составьте диаграмму Эйлера–Венна и объясните, почему это так.

5. В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 — немецкий, 8 — французский, 5 знают английский и немецкий, 4 — немецкий и французский, 3 — французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык?

6. Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Ответы: **1**. 9. **2**. 55 %. **3**. 10. **4**. Если на диаграмме Эйлера–Венна отметить данные в непересекающихся множествах класса, то общее число учащихся класса получится равным 42, а не 40, как сказано в условии. **5**. 12; 3; 4. **6**. 376.

§ 4. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. КОРТЕЖИ

Пусть даны два конечных множества X и Y. Рассмотрим множество всевозможных упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Множество таких пар называется *декартовым произведением* множеств X и Y и обозначается $X \times Y$.

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Заметим, что в определении декартова произведения речь идет об упорядоченных парах, то есть $(x, y) \neq (y, x)$ при $x \neq y$.

Заметим, что если одно из множеств X или Y пусто, то $X \times Y = \varnothing$.

Найдем число элементов декартова произведения множеств. Пусть $n(X) = m$; $n(Y) = k$. Тогда $n(X \times Y) = m\ k$. Действительно, пусть $X = \{x_1; x_2; ...; x_m\}$, $Y = \{y_1; y_2; ...; y_k\}$. Составим таблицу, в которой запишем все элементы декартова произведения.

$$
\begin{array}{cccc}
(x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \ldots & (x_1, y_k) \\
(x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \ldots & (x_2, y_k) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(x_m, y_1) & (x_m, y_2) & \ldots & (x_m, y_k)
\end{array}
$$

В этой таблице m строк и k столбцов, и она содержит $m\ k$ элементов.

Пусть задано m множеств $X_1, X_2, ..., X_m$. *Декартовым произведением* множеств $X_1; X_2; ...; X_m$ называется множество всевозможных упорядоченных наборов $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_m)$ из m чисел, причем $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_m \in X_m$. Обозначается декартово произведение $X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$.

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in X_i \ (i = 1, \ldots, m)\}.$$

Каждый набор $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, называется *кортежем* длины m, составленным из элементов множеств $X_1; X_2; \ldots; X_m$.

Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_m$, то есть дано декартово произведение $X \times X \times \ldots \times X = X^m$, то $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется *кортежем* длины m, составленным из элементов множества X. Элемент x_i называется i-ой *компонентой* кортежа.

Легко подсчитать, что число элементов декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ равно

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m) = n(X_1) \cdot n(X_2) \ldots \cdot n(X_m).$$

Доказанную формулу числа элементов декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ можно наглядно изобразить с помощью чертежей особого вида, называемых «деревьями» (рис. 11). Число элементов декартова произведения равно числу окончаний ветвей такого «дерева».

На рисунке 11, например, $X = \{x_1; x_2; x_3\}$, $Y = \{y_1; y_2\}$, $Z = \{z_1; z_2\}$ и дерево имеет $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ окончаний ветвей.

Два кортежа $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$, называются равными, если они имеют одинаковую длину ($m = p$) и их компоненты, имеющие одинаковые номера, равны ($x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_m = y_m$).

Например, кортежи $\alpha = (1; 2; 3)$ и $\beta = (1; 3; 2)$ не равны, хотя состоят из одних и тех же элементов; кортежи $\alpha = (1; 2; 3)$ и $\beta = (1; 2; 3; 1)$ не равны, так как имеют разную длину. Пример равных кортежей — это кортежи $\alpha = (2; 2^2; 2^3; 2^4)$ и $\beta = (\sqrt{4}; \sqrt{16}; \sqrt{64}; \sqrt{256})$.

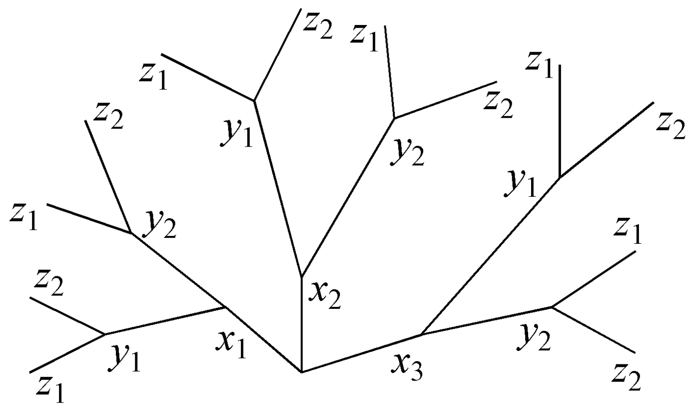


Рис. 11.

Примеры кортежей: координаты точек плоскости $M(x, y)$ — кортежи длины 2; векторы пространства, заданные своими координатами $\overline{a}\{x, y, z\}$ — кортежи длины 3.

Приведем два основных отличия кортежа от множества:

1) Во множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов различны, даже в том случае, если они состоят из одинаковых элементов;

2) Во множестве все элементы различны, а в кортеже компоненты могут повторяться.

§ 5. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

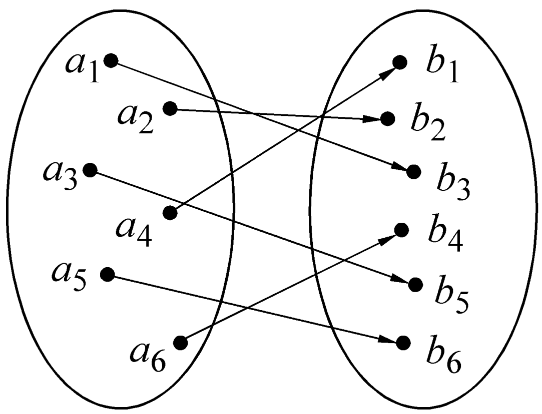
До сих пор мы рассматривали множества с точки зрения операций над ними. Теперь займемся сравнением множеств по количеству элементов.

Чтобы узнать, одинаковое ли число элементов в конечных множествах A и B, достаточно пересчитать их. Ясно, что для бесконечных множеств такой способ не годится.

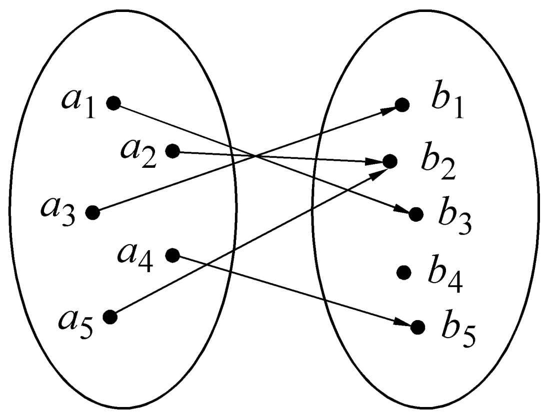
Есть и другой способ сравнения конечных множеств. Пусть каждому элементу множества A поставлен в соответствие в силу какого бы то ни было правила или закона некоторый определенный элемент множества B; если при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Пример взаимно однозначного соответствия между множествами A и B приведен на рисунке 12, *а*. Соответствие между множествами A и B на рис. 12, *б* не является взаимно однозначным, поскольку различным элементам a_1 и a_5 множества A соответствует один элемент $b_2 \in B$, а элемент $b_4 \in B$ не соответствует никакому элементу множества A.

Существование взаимно однозначного соответствия между конечными множествами равносильно тому, что они содержат одинаковое число элементов.



а



б

Рис. 12.

Важнейшая заслуга Г. Кантора состояла в том, что он применил идею взаимно однозначного соответствия для сравнения бесконечных множеств.

Множества A и B называются *эквивалентными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. О множествах A и B в этом случае говорят, что они имеют одинаковую мощность.

Таким образом, для бесконечных множеств слово «мощность» означают то же, что для конечных множеств «число элементов».

Примеры

1. Выберем на плоскости систему координат и поставим в соответствие каждой окружности вписанный в нее квадрат, стороны которого параллельны осям координат. Мы получим взаимно однозначное соответствие между множеством всех окружностей на плоскости и множеством всех квадратов, стороны которых параллельны осям координат. Следовательно, приведенные в данном примере множества имеют одинаковую мощность.

2. Пусть **N** — множество натуральных чисел, M — множество четных чисел. Очевидно, что M — подмножество **N**. Установим между ними взаимно однозначное соответствие, поставив в соответствие элементу $n \in \mathbf{N}$ элемент $2n \in M$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n & \ldots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\mathrm{M} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots & 2n & \ldots
\end{array}$$

Множества, эквивалентные множеству натуральных чисел, называют *счетными* множествами. Все счетные множества имеют ту же мощность, что и множество натуральных чисел.

3. **N** — множество натуральных чисел, **Z** — множество целых чисел. Покажем, что множество **Z** счетно.

$$\begin{array}{cccccccccc}
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \ldots & k & -k & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2k & 2k+1 & \ldots
\end{array}$$

4. Понятие взаимно однозначного соответствия весьма важно при изучении функций. Рассмотрим функцию $y = x^3$. Когда x изменяется на отрезке [–1; 2], то y изменяется на отрезке [–1; 8]. При этом каждому числу x из отрезка [–1; 2] соответствует одно и только одно значение y, принадлежащее отрезку [–1; 8], а каждому значению y из отрезка [–1; 8] — одно и только одно значение x из отрезка [–1; 2]. Иными словами, функция $y = x^3$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками отрезков [–1; 2] и [–1; 8]. Эта функция устанавливает и взаимно однозначное соответствие между точками числовых прямых x и y. Отсюда следует, что каждому значению y соответствует единственное значение x, такое, что $x^3 = y$. Это значение x называют кубическим корнем из y, $x = \sqrt[3]{y}$.

А функция $y = x^2$ не задает взаимно однозначного соответствия между числовыми прямыми x и y. Например, значениям $x = -3$ и $x = 3$ соответствует одно и то же значение $y = 9$. Кроме того, отрицательным значениям y не соответствуют никакие значения x. Чтобы получить взаимно однозначное соответствие, надо рассматривать функцию $y = x^2$ не на всей числовой прямой, а только на положительной полуоси $x \geq 0$. Каждой точке x этой полуоси соответствует одно значение $y = x^2$, принадлежащее положительной полуоси y. При этом ясно, что разным неотрицательным значениям x соответствуют разные значения y и для каждого $y \geq 0$ найдется такое x, что $x^2 = y$. Это значение x называют арифметическим значением квадратного корня из y, $x = \sqrt{y}$.

5. Рассмотрим два отрезка разной длины. На рис. 13 показано, как установить взаимно однозначное соответствие между множествами точек этих отрезков. Этот пример показывает, что для бесконечных множеств перестает быть справедливым привычное утверждение о том, что «часть меньше целого». Оно, безусловно, справедливо для конечных множеств, но для бесконечных множеств оно уже неверно.

<u>Упражнения</u>

1. Пусть A — множество всех окружностей на плоскости и B — множество всех точек этой плоскости. Каждой окружности ставится в соответствие ее центр. Является ли это соответствие взаимно однозначным?

2. Устанавливает ли функция $y = 2 - 4x$ взаимно однозначное соответствие между отрезками [1; 5] и [–2; –18]?

3. Устанавливает ли функция $y = x^2$ взаимно однозначное соответствие между отрезками: а) [–1; 2] и [0; 4]; б) [3; 5] и [9; 25]?

Ответы: **1**. Нет. **2**. Да. **3**. а) нет; б) да.