СОДЕРЖАНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ВУЗЕ

УДК 517

СИНТЕТИЧЕСКИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

В. М. Тихомиров

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Россия, 119899, г. Москва, Ленинские горы 1;
e-mail: vmtikh@googlemail.com

Обсуждаются проблемы современного математического образования. Приведён конспект «Синтетического курса математики», где собраны некоторые ключевые вопросы математики, рассматриваемой в её единстве.

Ключевые слова: альтернатива Фредгольма, метод Ньютона, принцип Лагранжа, теорема Гильберта – Шмидта.

Введение

В начале тридцатых годов произошла реформа математического образования. Для подведения итогов и обсуждения того, что разумно предусмотреть в будущем, полезно ознакомить читателя с организационными формами и содержанием математического образования, определёнными той реформой.

В самых общих чертах *организация образования* стала такой.

Образование делилось на два основных уровня: школьное и высшее. Школьное имело три подуровня: начальное (с первого по четвёртый классы), среднее (до седьмого класса) и полное (десятилетка). Высшее образование было двух видов — *институтское* (т. е. специализированное — инженерное, медицинское, экономическое и т. п.) и *университетское*, обращённое к определённой отрасли знания (математика, физика, химия, биология и т. п.).

Была организована и система «промежуточного» образования, состоящая из разного рода училищ (ремесленных, педагогических, военных, а также музыкальных, художественных, театральных) и техникумов, готовивших к производственной деятельности.

Цель личности состояла в служении обществу (а по сути дела — государству). Образование на каждом уровне было единым. Начальное и среднее образование были обязательными для всех. А далее для продолжения образования имелся выбор: либо среднее специальное — училища и техникумы (с возможным, впрочем, последующим поступлением в институт или университет), либо полное школьное образование с возможным последующим выбором высшего учебного заведения. В школах, училищах и техникумах учили по одинаковым программам для всех (учебники в школах были едиными), программы в институтах и университетах также были едиными (за очень малыми отклонениями).

Далее мы конкретно касаемся, в основном, форм и содержания математического образования на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, но держим в уме и две другие формы.

Мехмат был организован в 1933 году. Был назначен декан нового факультета — Владимир Васильевич Голубев (1884–1954). Он был выдающимся человеком — учёным широкого профиля (и математиком, и механиком), обладавшим большим организаторским дарованием — и очень значительной и харизматической личностью.

Голубев собрал вокруг себя учёных, имевших мировое признание. Среди математиков это были представители трёх поколений. К старшему принадлежали В. Ф. Каган (1869–1953), С. П. Фиников (1883–1964), В. В. Степанов (1889–1950), Б. Н. Делоне (1890–1980), О. Ю. Шмидт (1891–1956) и И. И. Привалов (1891–1941) (представители новороссийской (Каган), киевской (Делоне и Шмидт) и московской школы); к среднему поколению относились представители первого поколения учеников Н. Н. Лузина — Д. Е. Меньшов (1892–1988), А. Я. Хинчин (1894–1957)) и П. С. Александров (1896–1982); к младшему поколению относились ученики Лузина «второй волны» — Л. А. Люстерник (1899–1981), М. А. Лаврентьев (1900–1980), А. Н. Колмогоров (1903–1987) и Л. Г. Шнирельман (1905–1938). По-видимому, в этот коллектив попали сразу или со временем А. О. Гельфонд (1906–1968, ученик А. Я. Хинчина и В. В. Степанова) и И. Г. Петровский (1901–1973, ученик Д. Ф. Егорова).

В итоге были распределены обязанности, образованы кафедры, составлены программы курсов и написаны учебники по ним.

Автор стал учиться на мехмате в середине пятидесятых годов прошлого века. Это была золотая пора нашего факультета. В подтверждение приведу слова В. И. Арнольда [1]:

«Плеяда великих математиков, собранных на одном факультете, представляла собой явление совершенно исключительное, и мне не приходилось встречать ничего подобного более нигде. Колмогоров, Гельфанд, Петровский, Понтрягин, П. Новиков, Марков, Гельфонд, Люстерник, Хинчин и П. С. Александров учили таких студентов, как Манин, Синай, С. Новиков, В. М. Алексеев, Аносов, А. А. Кириллов и я сам".

В ту пору читались такие обязательные курсы по математике: **Аналитическая геометрия, Алгебра, Математический анализ, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, Теория функций комплексного переменного, Дифференциальная геометрия, Теории вероятностей, Вариационное исчисление, Анализ III и Теория уравнений с частными производными.** Естествознание было представлено курсами **Теоретической механики** и **Общей физики**. По завершении обучения студенты должны были сдавать финальный Государственный экзамен.

За прошедшие шесть десятилетий на мехмате многое изменилось: появились новые кафедры и новые обязательные курсы, но в целом структура и само содержание математического образования (заложенные у самых истоков факультета) во многом остаются неизменными. В частности, программа Госэкзамена почти не претерпела изменений.

Но за последнюю четверть века произошли огромные изменения и в нашей стране, и во всём мире. У нас изменился государственный строй, изменилась ментальность молодёжи, а во всём мире произошёл неслыханной силы информационный взрыв.

В этой статье я хочу дать определённую ориентацию в некоторых вопросах, относящихся к математическому образованию. Центральной частью статьи является конспект «Синтетического курса математики», выделяющего четыре фундаментальные математические темы, изучение которых позволяет обозреть некоторые узловые проблемы математического образования всех уровней. Далее всюду рассматриваются четыре случая: одномерный, двумерный, многомерный и бесконечномерный. Почти всегда одномерный случай — это школьный уровень, двумерный — для сильного школьника (скажем, для специальной математической школы) и для ВУЗа с не очень сильной математикой, многомерный — для ВУЗа с хорошей математикой и для младшего курса классического университета, бесконечномерный — для старшего университетского курса.

Итак, «Синтетический курс математики» и в нём первая тема

1. Разрешимость линейных уравнений

Решение линейных уравнений входило в начальное математическое образование во все времена. Теория линейных уравнений составляет содержание начальных курсов математики в институтах и университетах. Решение систем линейных уравнений — база огромной доли приложений современной математики. На линейной аппроксимации основано дифференциальное исчисление. В этом заключается мотивировка необходимости этой темы в математическом образовании.

Начнём с уровня начальных классов школы. Для понимания «теории» требуется лишь умение производить четыре арифметических действия с дробями, для решения задач требуется умение составлять по тексту задачи одно уравнение «с иксами».

Одномерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$Ax = y, \tag{1_1}$$

в котором A и y — известные числа (в начальной школе это дроби), а число x надо найти.

Арифметические задачи, сводящиеся к решению одного линейного уравнения с одним неизвестным, находятся в старейшем среди дошедших до нас «бумажном» (точнее, папирусном) сочинении, содержащем математические сюжеты. Оно было написано примерно 4000 лет назад и известно как *папирус Райнда*. (Папирус назван в честь английского египтолога, приобретшего его на рынке в Египте в 1858 году). Там решается следующий

Пример 1.1 (из папируса Райнда). *К числу прибавлена его седьмая часть и получилось 19. Найти число.*

Решение примера. Обозначив неизвестное число через x, приходим к уравнению $x + \dfrac{x}{7} = 19 \Rightarrow \dfrac{8}{7}x = 19 \Rightarrow x = \dfrac{133}{8} = 16\,\dfrac{5}{8} = 16{,}625.$

Теорема. *Уравнение* (1_1) *однозначно разрешимо, если* $A \neq 0$ (*тогда* $x = \frac{y}{A}$), *и неразрешимо, если* $A = 0$, *а* $y \neq 0$. *Если же* $A = y = 0$, *то любое число является решением.*

А теперь перейдём из начальной в среднюю школу. Здесь для решения задач потребуется умение составлять по тексту задачи два уравнения с двумя неизвестными.

Двумерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается система двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2, \end{aligned} \tag{1_2}$$

где числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ (*коэффициенты* системы (1_2)) и b_1, b_2 (*правая часть* системы (1_2)) заданы, а числа x_1 и x_2 надо найти. При $b_1 = b_2 = 0$ система (1_2) называется *однородной*.

Неизвестные x_1 и x_2 входят в систему (1_2) в первой степени, и потому её называют системой двух *линейных* уравнений с двумя неизвестными.

Задачи, сводящиеся к системам двух линейных уравнений с двумя неизвестными, научились решать также очень давно. В одном из древних китайских трактатов обсуждается

Пример 1.2. *В клетке фазаны и кролики. У них вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько в клетке фазанов и сколько кроликов?*

Метод решения. Метод решения индуктивный. Решать одно уравнение с одним неизвестным мы умеем. Научимся решать систему (1_2) двух уравнений с двумя неизвестными.

Если все коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22} системы (1_2) равны нулю, то решение возможно (т. е. система совместна) лишь когда $b_1 = b_2 = 0$, и им является любая пара чисел x_1 и x_2; в противном случае система (1_2) не имеет решения (или, как говорят, *несовместна*).

Если же, скажем, $a_{22} \neq 0$, то, выразив x_2 из второго уравнения через x_1, подставим полученное выражение в первое уравнение. В результате получим одно уравнение с одним неизвестным x_1, которое мы уже научились решать. Если это уравнение совместно, найдем из него x_1, а затем x_2. Если получившееся уравнение несовместно, то и изначальная система несовместна.

Этот приём называется *метод последовательного исключения неизвестных*, или *метод Гаусса* — в честь одного из величайших математиков всех времён Карла Фридриха Гаусса (1777–1855) (который был к тому же великим вычислителем), впервые описавшего его в общем виде в 1849 г., хотя сам приём применялся в китайском трактате «Математика в девяти книгах» и был известен в Китае за тысячу лет до нашей эры.

Решение примера 1.2. Обозначив число фазанов через x_1, а число кроликов через x_2, приходим к системе уравнений $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 35, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 94. \end{aligned}$ Выразив x_1 из первого уравнения через x_2 и подставив это выражение во второе уравнение, получим $2x_2 = 24$, откуда следует, что $x_2 = 12$, тогда из первого уравнения $x_1 = 23$.

Существенную роль в теории линейных уравнений играет теорема, которую называют *альтернативой Фредгольма*. Сформулируем и докажем её в двумерном случае. Здесь мы выходим на уровень специальной математической школы.

Теорема (альтернатива Фредгольма) (для двух уравнений с двумя неизвестными). *Система* (1_2) *либо разрешима при любой правой части, либо однородная система имеет ненулевое решение*.

Эрик Ивар Фредгольм (1866–1927) — замечательный математик, профессор Стокгольмского университета. Его основная работа [2] была опубликована в 1903 г.

Замечание. Приводимые здесь и ниже доказательства для уровня специальной школы предполагают, что школьный преподаватель сможет объяснить своим ученикам необходимый материал, выходящий за рамки школьной программы. В частности, для излагаемого ниже доказательства альтернативы Фредгольма — это то, что, подобно уравнению (1_1), система (1_2) записывается в виде $Ax = y$, где A — матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ — двумерные векторы, координаты которых действительные числа, т. е. числа из $\mathbb{R}$ (и тогда пишут, что $x, y \in \mathbb{R}^2$); что преобразование, сопоставляющее вектору x вектор Ax, обладает линейным свойством: $A(\alpha x + \alpha' x') = \alpha Ax + \alpha' Ax'$; что A^T — матрица, полученная из матрицы A переменой строк на столбцы; что скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ векторов x и y равно $x_1y_1 + x_2y_2$; наконец, это понятия образа $\operatorname{Im} A$ и ядра $\operatorname{Ker} A$ преобразования A.

Доказательство альтернативы Фредгольма складывается из двух частей.

1. Пусть $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^2$ — это означает, что система имеет решение при любой правой части, т. е. имеет место первый вариант альтернативы Фредгольма.

Докажем, что если $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^2$, то $\operatorname{Ker} A = 0$. Действительно, допустим, что $\operatorname{Im} A = \mathbb{R}^2$, но найдётся вектор $y^1 \neq 0$ такой, что $Ay^1 = 0$. Тогда найдем вектор y^2 такой, что $Ay^2 = y^1$, и вектор y^3 такой, что $Ay^3 = y^2$. Три вектора в $\mathbb{R}^2$ линейно зависимы. Это значит, что найдутся числа a_1, a_2, a_3, не равные одновременно нулю и такие, что $a_1y^1 + a_2y^2 + a_3y^3 = 0$. (Этот факт легко сводится к простому утверждению, что система двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными имеют ненулевое решение.) Подействовав на это равенство оператором A^2 и используя линейность этого оператора, получим, что $a_3y^1 = 0$, откуда $a_3 = 0$ (ибо $y^1 \neq 0$). Аналогично покажем, что $a_2 = a_1 = 0$, что противоречит тому, что не все a_i равны нулю.

2. Рассмотрим случай, когда $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^2$. Тогда, поскольку образ линейного отображения является линейным подпространством, $\operatorname{Im} A$ либо нуль, либо прямая, проходящая через нуль.

В первом случае любой вектор принадлежит ядру, т. е. однородная система имеет ненулевое решение, значит, имеет место второй вариант альтернативы Фредгольма.

Во втором случае найдётся ненулевой ортогональный вектор — обозначим его $\overline{y}$ — к прямой, являющейся образом преобразования A (рис. 1), т. е. $\langle \overline{y}, Ax\rangle = 0$. Но $\langle \overline{y}, Ax\rangle = \langle A^T\overline{y}, x\rangle$. Значит, $\langle A^T\overline{y}, x\rangle = 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}^2$, следовательно, $A^T\overline{y} = 0$, т. е. $\overline{y}$ — ненулевое решение однородной системы с транспонированной матрицей коэффициентов. В силу утверждения, доказанного в п. 1,

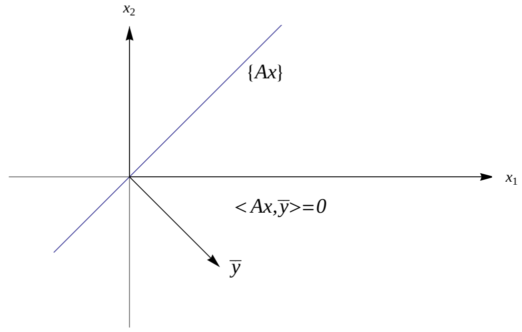

Рис. 1

$\operatorname{Im} A^T \neq \mathbb{R}^2$ (т. е. преобразование A^T не сюръективно). Применив к A^T только что проведённое рассуждение, приходим к тому, что однородное система с матрицей $(A^T)^T = A$ имеет ненулевое решение, т. е. опять имеет место второй вариант альтернативы Фредгольма. $\square$

Теперь можно рассказать о том, как можно добраться до альтернативы Фредгольма в бесконечномерном случае. Этот результат, доказанный Фредгольмом в 1903 году, воспринимался в начале XX века как одна из вершин математики того времени.

Первый шаг — переход на институтский уровень.

Многомерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается система n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= y_n, \end{aligned} \tag{1_n}$$

коротко записываемая как $Ax = y$, где A — $n \times n$-матрица, x и y — векторы из $\mathbb{R}^n$.

Метод решения. Метод Гаусса решения уравнения (1_n) индуктивный, где первый шаг индукции был проделан при решении системы (1_2). Далее, в предположении, что системы (1_{n-1}), $n > 2$, мы решать умеем, надо исключить (если $n \times n$-матрица ненулевая) одно неизвестное и решать полученную систему (1_{n-1}). А если матрица нулевая, то всё тривиально и было объяснено в двумерном случае.

Альтернатива Фредгольма для n уравнений с n неизвестными формулируется дословно так же, как для случая $n = 2$ выше, с заменой двойки на n:

Теорема (альтернатива Фредгольма) (для n уравнений с n неизвестными). *Система* (1_n) *либо разрешима при любой правой части, либо соответствующая однородная система имеет ненулевое решение*.

И доказательство состоит из тех же двух шагов. Первый шаг совершенно аналогичен рассмотренному в двумерном случае.

И второй шаг по сути повторяет рассуждение для двумерного случая: если $\operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^n$, то $\operatorname{Im} A$ есть собственное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$. Такие подпространства задаются системой линейных однородных уравнений. Возьмём одно из них $\langle \overline{y}, x \rangle = 0 \,\forall\, x \in L$. Это соотношение означает, что $\overline{y}$ ортогонален L, т. е. $0 = \langle \overline{y}, Ax \rangle = \langle A^T \overline{y}, x \rangle \,\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. А далее буквально повторяется конец доказательства для двумерного случая.

В конечномерном случае на матрицу A системы никаких ограничений не накладывается. В бесконечномерном случае нужны ограничения. Теорему Фредгольма доказывают для бесконечномерных операторов, представимых в виде суммы единичного оператора и компактного оператора, т. е. переводящих каждое ограниченное множество в множество, замыкание которого компактно. Доказательство альтернативы Фредгольма в гильбертовом пространстве, обобщающем пространство $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением, проходит по схеме двумерного. На первом шаге строится последовательность векторов $Ay^{i+1} = y^i$, $i \in \mathbb{N}$, и противоречие извлекается из компактности, а на втором шаге показывается, что образ оператора замкнут и к нему можно восставить перпендикуляр (эти факты обычно входят в программу курса функционального анализа), и далее проходит двумерное рассуждение.

2. Разрешимость нелинейных уравнений

Нелинейные уравнения возникают почти во всех математических моделях, описывающих явления и процессы в естествознании, инженерии, теории управления, экономике и т. п., и нахождение приближенных решений таких уравнений — одна из основных задач математики и её приложений. К сожалению, в школе не уделяется должное внимание разрешимости нелинейных уравнений, что в наш компьютерный век вызывает удивление. Далее рассказывается о методе решения нелинейных уравнений, восходящем к Ньютону (он назван у нас модифицированным методом Ньютона). Этот метод стал достоянием бесконечномерного анализа в середине XX века (в частности, в исследованиях Л. В. Канторовича (1912–1986), нашего выдающегося соотечественника, лауреата Нобелевской премии по экономике).

Начнём с одномерного случая, здесь это уровень старших классов спецшколы.

Одномерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$F(x) = y, \tag{2_1}$$

в котором F — функция одного переменного, y — известное число, а число x надо найти.

Пример 2.1. *Решить уравнение* $x^2 = 2$.

Одним из потрясений периода древнегреческой математики было осознание того, что $\sqrt{2}$ не дробь — принято считать, что это в V в. до н. э. доказали пифагорейцы. Рухнула иллюзия, что все величины можно выразить отношением двух натуральных чисел. Со временем возникла проблема приближения корня из двух дробями. Считается, что первый алгоритм для приближенного вычисления числа $\sqrt{2}$ (или решения нелинейного уравнения $x^2 = 2$), принадлежит древнегреческому математику Герону, жившему в первом веке нашей эры (этот метод — не что иное, как алгебраическая запись геометрического доказательства иррациональности $\sqrt{2}$). Ниже приведён алгоритм Герона, т. е. героновское решение примера 2.1.

Решение примера 2.1. На рис. 2 изображён фрагмент графика функции $y = x^2$ (это уровень средней школы). График пересекает горизонтальная черта, проведённая на высоте $y = 2$. Точка пересечения этой черты с графиком имеет ординату, обозначаемую $\sqrt{2}$ (без алгоритма приближения к числу, квадрат которого равен двум, это просто символ). Это число можно сколь угодно точно приблизить дробью. Герону приписывают следующую итерационную формулу для $\sqrt{2}$: $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$. Данная формула и есть решение примера 2.1, записываемое так: $\sqrt{2} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где (при любом x_0) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$. При этом говорят: x_n *сходится к* $\sqrt{2}$.

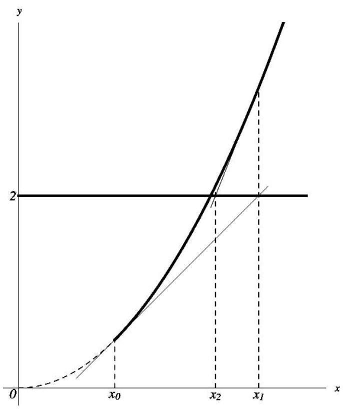

Рис. 2

В 1676 году Ньютон описал метод решения уравнения $F(x) = y$ для дифференцируемой функции F: $x_{n+1} = \dfrac{1}{F'(x_n)}\big(x_n F'(x_n) - F(x_n) + y\big)$. Свой метод Ньютон продемонстрировал на примере решения уравнения $F(x) = x^3 - 2x = 5$ [3, с. 3]. (О понятии производной речь пойдёт в следующем параграфе, а здесь, в этом «петитном» абзаце, оно предполагается известным.) Первые два шага метода Ньютона («метода касательных») изображены на рис. 2, если считать, что на рисунке жирным нарисован график функции $y = F(x)$. Если применить алгоритм Ньютона к функции $F(x) = x^2$, то обнаружится, что он совпадает с алгоритмом Герона.

Четверть века тому назад невозможно было поставить в школе задачу решения нелинейного уравнения. Но наступил компьютерный век, и любому школьнику, разбирающемуся с компьютерами, можно поставить задачу найти приближение корня из двух, скажем, с двадцатью пятью знаками. И многие сделают это, проитерировав, к примеру, алгоритм Герона.

Алгоритм Герона – Ньютона не единственный. Сейчас будет рассказано о достаточно общем методе решения нелинейного уравнения (мы называем его *модифицированным методом Ньютона*). Здесь ситуация оказывается даже проще, чем с методом Гаусса: метод решения задачи (2_1) с заменой числа x на n-мерный вектор x, приводит к решению задачи (2_n), а если заменить число x на непрерывную на отрезке функцию $x(\cdot)$ (принадлежащую, скажем, бесконечномерному пространству $C([a, b])$), описываемый далее метод приводит к решению задачи (2_∞).

Модифицированный метод Ньютона. Взглянем на рисунок 3.

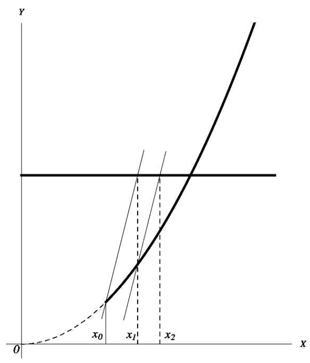

Рис. 3

Перед нами фактически тот же рисунок, что и ранее, но теперь мы полагаем, что на нём изображён фрагмент графика произвольной «гладкой» (без изломов) функции одного переменного $x \mapsto F(x)$. Пусть требуется найти корень уравнения $F(x) = y$. Для того, чтобы достичь цели, «мы пойдём другим путём» — не по касательной, как это делал Ньютон, а чуть вбок — по прямой $y = A(x - x_0) + F(x_0)$, задавшись некоторой начальной точкой $\big(x_0, F(x_0)\big)$ и отличным от нуля числом A (то и другое в нашей власти). По этой прямой доберёмся до уровня y, т. е. решим линейное уравнение с одним неизвестным $F(x_0) + A(x - x_0) = y$. Обозначив его решение x_1, получим, что $x_1 = x_0 + A^{-1}\big(y - F(x_0)\big)$. И далее будем поступать аналогично, полагая

$$x_k = x_{k-1} + A^{-1}\big(y - F(x_{k-1})\big), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{I$_1$}$$

Это и есть модифицированный метод Ньютона. При выполнении некоторых условий последовательность x_k будет сходиться к нужному решению. Сходимость здесь медленнее, чем в методе Ньютона, лишь со скоростью геометрической прогрессии, но применять модифицированный метод удобнее (не надо на каждом шаге пересчитывать $F'(x_n)$).

Основной результат, обеспечивающий сходимость —

Теорема об обратной функции в одномерном случае. *Пусть вещественная функция F определена в окрестности точки $\widehat{x}$ и при этом существуют числа $A \neq 0$, θ, $0 < \theta < 1$ и $\delta > 0$ такие, что для любых x, x', для которых $|x - \widehat{x}| < \delta$, $|x' - \widehat{x}| < \delta$, выполнено неравенство*

$$|F(x) - F(x') - A(x - x')| \leq |A|\,|x - x'|\,\theta. \tag{II$_1$}$$

Тогда для любого y, отстоящего от $F(\widehat{x})$ не больше, чем на $\delta(1-\theta)|A|$, последовательность (I$_1$) *будет стремиться к числу $\varphi(y)$, отстоящему от $\widehat{x}$ не больше, чем на δ, такому, что $F\big(\varphi(y)\big) = y$ и при этом $|\varphi(y) - \widehat{x}| \leq K|y - F(\widehat{x})|$, где $K = \dfrac{1}{|A|(1-\theta)}$.*

Доказательство использует факт, о котором не говорилось выше — свойство полноты прямой: фундаментальная последовательность имеет предел.

Доказательство. Положим $x_0 = \widehat{x}$ и докажем, что a) элементы x_k для всех $k \geq 0$ лежат в интервале $\Delta = (\widehat{x} - \delta, \widehat{x} + \delta)$ и b) что последовательность $\{x_k\}_{k \geq 0}$ фундаментальна. Утверждение a) докажем по индукции. Начальный элемент x_0 принадлежит интервалу Δ по определению. Пусть $x_s \in \Delta$, $1 \leq s \leq k$. Докажем, что $x_{k+1} \in \Delta$. Имеет место следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| \;=\; & |A^{-1}(y - F(x_k)| = |A|^{-1}|y - F(x_k)| = |A|^{-1}|y - F(x_k) - y + \\ & + F(x_{k-1}) + \; A(x_k - x_{k-1})| \leq \theta |x_k - x_{k-1}| \leq \ldots \leq \theta^k |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

В ней первое равенство непосредственно следует из (I_1), второе очевидно, третье получено добавлением под модуль выражения, которое равно нулю в силу (I_1); первое неравенство следует из условия (II_1), а дальше итерируется это неравенство.

Теперь, применяя неравенство «модуль суммы не превосходит суммы модулей», формулу для суммы геометрической прогрессии, формулу (I_1) при $k = 1$ и учитывая выбор y, имеем:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \widehat{x}| \leq |x_{k+1} - x_k| + \ldots + |x_1 - \widehat{x}| \leq (\theta^k + \theta^{k-1} + \ldots + 1)|x_1 - \widehat{x}| = \\ = \frac{1}{|A|(1-\theta)}\,|y - F(\widehat{x})| \leq \delta, \end{aligned}$$

т. е. a) доказано.

Докажем b). Для любых $k, l \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\begin{aligned} |x_{k+l} - x_k| \leq |x_{k+l} - x_{k+l-1}| + \ldots + |x_{k+1} - x_k| \leq (\theta^{k+l-1} + \ldots + \theta^k)|x_1 - \widehat{x}| = \\ = \frac{\theta^k}{|A|(1-\theta)}\,|y - F(\widehat{x})| \leq \delta\theta^k, \end{aligned} \tag{i}$$

откуда вытекает, что $\{x_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность. Значит, она сходится. Обозначим её предел $\varphi(y)$. Переход в неравенстве (i) к пределу по l при $k = 0$ даёт $|\varphi(y) - \widehat{x}| < \delta$. Переход к пределу в (I_1) с учётом непрерывности функции F в интервале Δ (которая вытекает из условия (II_1)) даёт $F\big(\varphi(y)\big) = y$.

Переходя к пределу в (i) по l при $k = 0$, получаем:

$$|\varphi(y) - \widehat{x}| \leq \frac{1}{A(1-\theta)}\,|y - F(\widehat{x})|,$$

откуда всё следует. □

Двумерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) = y_1, \\ F_2(x_1, x_2) = y_2, \end{aligned} \tag{2_2}$$

в которой F_1 и F_2 — функции двух переменных, y_1 и y_2 — известные числа, а числа x_1 и x_2 надо найти. Эту систему уравнений можно переписать в сокращённом виде

$$F(x) = y, \qquad F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{2_2}$$

Опишем теперь модифицированный метод Ньютона для задачи (2_2). Внешне в сокращённой записи он будет выглядеть в точности так, как в одномерном случае, только вместо числа A здесь будет фигурировать матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Для того, чтобы решить задачу (2_2), надо задаться некоторой начальной позицией $\bigl(x_0, F(x_0)\bigr)$ и обратимой матрицей A (то и другое в нашей власти). Далее надо решить уравнение $F(x_0) + A(x - x_0) = y$. Обозначив решение x_1, получим, что $x_1 = x_0 + A^{-1}\bigl(y - F(x_0)\bigr)$. И далее будем поступать аналогично, полагая

$$x_k = x_{k-1} + A^{-1}\bigl(y - F(x_{k-1})\bigr), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{I_2}$$

Это и есть модифицированный метод Ньютона в двумерном случае.

Далее с ничтожными изменениями нужно повторить сказанное в одномерном случае. А именно, при выполнении некоторых условий последовательность векторов x_n будет сходиться к нужному решению. Основной результат здесь формулируется так:

Теорема об обратном отображении в двумерном случае. *Пусть отображение $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ определено в окрестности вектора $\widehat{x} \in \mathbb{R}^2$ и при этом существует обратимая матрица A размера 2×2 и числа θ, $0 < \theta < 1$, и $\delta > 0$ такие, что для любых x, $x' \in \mathbb{R}^2$, для которых $|x - \widehat{x}| < \delta$, $|x' - \widehat{x}| < \delta$, выполнено неравенство*

$$|F(x) - F(x') - A(x - x')| \le \|A\|\,|x - x'|\theta. \tag{II_2}$$

Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^2$, отстоящего от $F(\widehat{x})$ не больше, чем на $\delta(1-\theta)\|A\|$, последовательность (I_2) *будет стремиться к вектору $\varphi(y)$, отстоящему от $\widehat{x}$ не больше, чем на δ, такому, что $F\bigl(\varphi(y)\bigr) = y$ и при этом $|\varphi(y) - \widehat{x}| \le K|y - F(\widehat{x})|$, где $K = \dfrac{1}{\|A\|(1-\theta)}$.*

Доказательства использует свойство полноты плоскости $\mathbb{R}^2$: фундаментальная последовательность точек из $\mathbb{R}^2$ имеет предел. При этом доказательство, изложенное выше для одномерного случая, сохраняется полностью, надо только (и в формулировке, и в доказательстве) для вектора $z = (z_1\, z_2) \in \mathbb{R}^2$ под $|z|$ понимать $\sqrt{z_1^2 + z_2^2}$.

Теперь опять можно рассказать о том, как можно в два хода добраться до одной из вершин — теоремы об обратном отображении в бесконечномерном случае.

Сначала выйдем на институтский уровень.

Многомерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \dots, x_n) = y_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_n(x_1, \dots, x_n) = y_n, \end{aligned}$$

в которой $F_1, \dots, F_2$ — функции n переменных, $y_1, \dots, y_2$ — известные числа, а числа $x_1, \dots, x_2$ надо найти. Эту систему уравнений можно переписать в сокращённом виде

$$F(x) = y, \qquad F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2_n}$$

Модифицированный метод Ньютона для задачи (2_n) выглядит в точности, как в двумерном случае, только вместо 2×2-матрицы здесь будет фигурировать матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$.

Формулировка теоремы и её доказательство также фактически не меняются, и мы сразу перескочим на университетский уровень, где надо владеть ещё понятием банахова пространства.

Бесконечномерный случай.

Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$F(x) = y, \qquad F : X \to X, \qquad x, y \in X. \tag{2_∞}$$

в котором X — банахово пространство, F — отображение из X в X, y — известный элемент из X, а элемент $x \in X$ надо найти.

Для того, чтобы решить задачу (2_∞), надо задаться некоторой начальной позицией $\bigl(x_0, F(x_0)\bigr)$ и обратимым отображением $A : X \to X$ (то и другое в нашей власти). Далее надо решить уравнение $F(x_0)+A(x-x_0) = y$. Обозначив решение x_1, получим, что $x_1 = x_0 + A^{-1}\bigl(y - F(x_0)\bigr)$. И далее будем поступать аналогично вышеизложенному, полагая

$$x_k = x_{k-1} + A^{-1}\bigl(y - F(x_{k-1})\bigr), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{I_∞}$$

Это и есть модифицированный метод Ньютона. При выполнении некоторых условий последовательность элементов x_n будет сходиться к нужному решению. Точнее говоря, имеет место

Теорема об обратном отображении в бесконечномерном случае. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахово пространство, отображение $F : X \to X$ определено в окрестности элемента $\widehat{x} \in X$ и при этом существуют обратимое непрерывное линейное отображение $A : X \to X$ и числа θ, $0 < \theta < 1$ и $\delta > 0$ такие, что для любых x, $x' \in X$, для которых $\|x - \widehat{x}\|_X < \delta$, $\|x' - \widehat{x}\|_X < \delta$, выполнено неравенство*

$$\|F(x) - F(x') - A(x - x')\|_X \le \theta\|A\|\cdot \|x - x'\|_X. \tag{II_∞}$$

Тогда для любого $y \in X$, отстоящего от $F(\widehat{x})$ по норме не больше, чем на $\delta(1-\theta)\,\|A\|$, последовательность (I_∞) будет стремиться к элементу $\varphi(y) \in X$, отстоящему от $\widehat{x}$ по норме не больше, чем на δ, такому, что $F\bigl(\varphi(y)\bigr) = y$ и при этом $\|\varphi(y) - \widehat{x}\|_X \le K\|y - F(\widehat{x})\|_X$, где $K = \dfrac{1}{\|A\|\,(1-\theta)}$.

Доказательство, проведённое для многомерного случая, сохраняется в случае бесконечномерном, только вместо модуля вектора надо писать норму элемента.

3. Начала математического анализа и теории экстремума

Начнём со школьного уровня.

Одномерный случай.

Основными понятиями математического анализа являются понятия производной и интеграла. Они были введены в математику Ньютоном (*1643–1727*) *и Лейбницем* (*1646–1716*). *«Для пояснения искусства анализа» Ньютон приводит две задачи. Вот эти задачи:* I) *Пусть длина пути известна. Нужно узнать скорость в данный момент времени.* II) *Пусть известна скорость движения. Надо узнать длину пройденного пути.* (Мы чуть модернизировали текст Ньютона из [3, с. 45]).

Расшифруем сказанное. Учитывая, что начала математического анализа были включены в программу старших классов школ А. Н. Колмогоровым, ограничимся краткими замечаниями.

Постановка первой ньютоновской задачи и понятие производной. Пусть экипаж движется по прямолинейной дороге, и пусть функция, сопоставляющая моменту времени t длину пройденного пути $s(t)$, известна. Требуется найти («мгновенную») скорость экипажа в момент τ.

Продумывание этой задачи Ньютона естественно приводит к идее, что скорость $v(\tau)$ экипажа в некоторый момент времени τ примерно равна *средней скорости* $\dfrac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ на малом участке времени от τ до $\tau+\Delta t$, а сама скорость равна *пределу этого отношения при* Δt *стремящемся к нулю.* (Слово «предел» по Ньютону означало, что чем меньше будет величина приращения времени Δt, тем меньше средняя скорость $\dfrac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ будет отличаться от числа $v(\tau)$ — полшага до нашего понимания на языке ε-δ.) Потом стали писать так: $v(\tau)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(\tau+\Delta t)-s(\tau)}{\Delta t}$ и говорить, что скорость — это *производная пути по времени.* Ньютон обозначил этот предел точкой над s: $v(\tau)=\dot{s}(\tau)$. Итак, *производная по Ньютону — это скорость.* Сейчас это общеизвестно, но поражает отчётливость понимания Ньютоном сути дела с самого начала!

Если исходной позицией для Ньютона было естествознание, то Лейбниц во многом исходил из геометрии. Излагая концепцию Лейбница, разумно использовать более привычные обозначения аргумента и функции, когда аргумент обозначается буквой x, а функция — буквой f. Тогда производная $f'(\widehat{x})$ функции f в точке $\widehat{x}$ есть $\lim\limits_{x\to\widehat{x}}\dfrac{f(x)-f(\widehat{x})}{x-\widehat{x}}$, а с геометрической точки зрения — это *тангенс угла наклона касательной к графику функции* f *в точке* $\big(\widehat{x}, f(\widehat{x})\big)$. Лейбниц осознал важнейшее свойство производной — она задаёт *наилучшую локальную линейную аппроксимацию функции.* Соответствующую линейную функцию Лейбниц назвал *дифференциалом*, и само новое направление получило название *дифференциального и интегрального исчисления.*

Предшественники анализа (Паскаль, Ферма, Гюйгенс и др.) рассматривали целый цикл задач о касательных к различным кривым, а ответ через производные получили Ньютон и Лейбниц.

Понятие производной (многомерный и бесконечномерный случаи). Понятие линейной аппроксимации даёт возможность для толкования понятия производной в конечномерном и даже в бесконечномерном случаях. Приведём определение производной сразу на институтском = конечномерном и — параллельно в скобках — университетском = бесконечномерном уровнях.

Отображение F из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (из нормированного пространства X в нормированное пространство Y) называется *дифференцируемым в точке* $\widehat{x}$, если существует линейный оператор Λ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (линейный непрерывный оператор $\Lambda : X \to Y$) такой, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, для которого из неравенства $|x - \widehat{x}| < \delta$ ($\|x - \widehat{x}\|_X < \delta$) следует неравенство $|F(x) - F(\widehat{x}) - \Lambda(x - \widehat{x})| < \varepsilon|x - \widehat{x}|$ ($\|F(x) - F(\widehat{x}) - \Lambda(x - \widehat{x})\|_Y < \varepsilon\|x - \widehat{x}\|_X$). Этими соотношениями оператор Λ определяется однозначно, он называется *производной отображения* F *в точке* $\widehat{x}$ и обозначается $F'(\widehat{x})$. (В одномерном случае приращение аргумента и функции Лейбниц обозначал буквой d, потому для дифференциала функции $y = f(x)$ до сих пор применяется запись $dy = f'(x)dx$.)

В конечномерном случае определение производной как линейного оператора восходит к Вейерштрассу, в бесконечномерном — к Фреше (1912).

На конечномерном и на университетском уровнях бывает полезно понятие строгой дифференцируемости. Отображение F называется *строго дифференцируемым в точке* $\widehat{x}$, если оно дифференцируемо в $\widehat{x}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенств $\|x_i - \widehat{x}\|_X < \delta$, $i = 1, 2$ следует, что $\|F(x_1) - F(x_2) - F'(\widehat{x})(x_1 - x_2)\|_Y < \varepsilon\|x_1 - x_2\|_X$. Дифференцируемое отображение F называется *регулярным в точке* $\widehat{x}$, если его производная в точке $\widehat{x}$ сюръективна (т. е. $F'(\widehat{x})X = Y$).

Постановка второй ньютоновской задачи и понятие интеграла. Пусть снова экипаж движется по прямолинейной дороге, и в каждый момент времени t известна его мгновенная скорость $v(t)$. Требуется найти длину пути, пройденного экипажем между моментами времени t_1 и t_2.

Естественно допустить, что на малом отрезке времени $\Delta = [\tau, \tau + \Delta\tau]$ скорость меняется мало, поэтому путь примерно равен отрезку времени $|\Delta\tau|$, умноженному на значение скорости в какой-то момент времени из этого отрезка. Таким образом, весь путь примерно равен равен сумме $\sum\limits_{i=1}^{N} |\Delta_i|\, v(\tau_i)$, где $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ — разбиение отрезка Δ на «отрезочки» $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$, а τ_i — некоторая точка отрезка Δ_i.

Всё это естественно ведёт к определению интеграла по Риману — осталось перейти к пределу при стремлении $\max \Delta_i$ к нулю.

В силу всего сказанного, понятиям производной и интеграла возможно дать выразительное толкование: производная (в данный момент) движущегося одномерного объекта — это его мгновенная скорость в этот момент, а интеграл (по отрезку) функции, график которой лежит в верхней полуплоскости — это площадь части этой полуплоскости под графиком.

Пример 3.1. *Найти длину пути, пройденного телом, стартовавшим из нулевой точки, скорость которого возрастала линейно по времени:* $v(t) = at$.

Решение. За время T тело пройдёт путь, равный площади треугольника с вершинами $(0,0)$, $(T,0)$ и $(T,\alpha T)$, т. е. $s(T)=\dfrac{aT^2}{2}$.

Именно так (применив формулу площади треугольника) Галилей вывел формулу для пути тела, движущегося равноускоренно.

Следующий результат является центральным в одномерном математическом анализе: он связывает дифференцирование и интегрирование — по словам Ньютона, позволяет по скорости определять путь.

Теорема (формула Ньютона – Лейбница): $\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{s}(t)\,dt = s(t_1)-s(t_0)$, *или, в лейбницевых обозначениях*, $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$.

Для доказательства нам понадобится

Формула Лагранжа о конечном приращении. *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале (a,b). Тогда в этом интервале найдётся точка ξ такая, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.*

Оставим пока эту формулу без доказательства.

Для вывода формулы Ньютона – Лейбница в обозначениях Ньютона рассмотрим, выбрав $\varepsilon>0$, риманову сумму $\sum\limits_{i=1}^{N}|\Delta_i|\,v(\tau_i)$ при столь малом $\max\Delta_i$, что она отличается от $\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$ меньше, чем на ε. Применяя к отрезку Δ_k формулу Лагранжа, получим $v(\theta_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)=s(\tau_{k+1})-s(\tau_k)$, где $\theta_k\in\Delta_k$. Суммируя по k, получим справа $s(t_1)-s(t_0)$, а слева — риманову сумму, отличающуюся от $\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$ менее, чем на ε. $\square$

Многомерное обобщение теоремы Ньютона – Лейбница останется вне наших рассмотрений. Там роль дифференцируемой функции играет дифференциальная форма, и многомерное обобщение теоремы Ньютона – Лейбница, осознанное в полном объёме А. Пуанкаре (1854–1912) — тоже одним из величайших математиков всех времён — состоит в том, что *интеграл по области от дифференциала формы равен интегралу от самой формы по границе этой области*.

Условия экстремума

Теория экстремума имеет определённую дату своего рождения. Это 1638 год, когда П. Ферма направил М. Мерсенну письмо [4] для передачи его Р. Декарту и Ж. Робервалю (журналов в ту пору ещё не существовало, и новые научные результаты распространялись путём переписки). В письме излагался приём решения экстремальных задач без ограничений для функций одной переменной. (Мерсенн (1588–1648), бывший сам заметным учёным, сыграл особую роль в распространении научных достижений и в консолидации учёных своего времени.)

Идею Ферма замечательно выразил Ньютон, который сказал так: «*Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течёт ни вперёд, ни назад*», а до Ньютона — Кеплер, сказавший, что вблизи минимума «изменения несущественны». А по Лейбницу идея Ферма заключается в том, что касательная к графику функции в точке экстремума горизонтальна. Вот вам три подхода к математическому утверждению — физика, вычислителя и геометра.

Мотивировкой целесообразности включения теории экстремума в математическое образование всех уровней может служить то, что одна глава теории экстремума — вариационное исчисление — является базой математического естествознания, другая глава — теория оптимального управления — лежит в основе теории управления динамическими системами, а выпуклые экстремальные задачи лежат в основании математической экономики.

Как всегда, начинаем со школы.

Одномерный случай (гладкая задача без ограничений).

Постановка задачи. Рассматривается задача: *найти минимум (или максимум) функции f, определённой на некотором подмножестве действительной прямой*:

$$f(x) \to \mathrm{extr}. \tag{3_1}$$

Говорят, что в точке ξ, принадлежащей области определения функции f, она имеет локальный минимум, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $f(x) \geq f(\xi)$ для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x - \xi| < \varepsilon$.

Если в точке ξ функция f дифференцируема и выполнено равенство $f'(\xi) = 0$, то эта точка называется *стационарной точкой* функции f.

Теорема Ферма для задачи (3_1). *Пусть f — функция одного переменного, определённая в интервале $(\widehat{x} - \varepsilon, \widehat{x} + \varepsilon)$ и дифференцируемая в точке $\widehat{x}$. Тогда, если $\widehat{x}$ есть точка локального экстремума, то $\widehat{x}$ является стационарной точкой функции f, т. е. $f'(\widehat{x}) = 0$.*

Идея этого результата содержалась в упомянутом выше письме Ферма.

Доказательство. Если допустить, что $f'(\widehat{x}) \neq 0$, то по определению производной $f(\widehat{x} + \theta) = f(\widehat{x}) + \theta f'(\widehat{x}) + o(\theta)$. Выбирая θ достаточно малым и поочерёдно разных знаков, видим из последнего равенства, что f не имеет в $\widehat{x}$ ни локального минимума, ни локального максимума. $\square$

Следствие. *Если функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и при этом дифференцируема внутри этого отрезка, то и абсолютный максимум, и абсолютный минимум находятся либо среди стационарных точек, либо среди концов отрезка.*

Доказательство следствия. В силу теоремы Вейерштрасса о том, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на нём и своего абсолютного минимума, и своего абсолютного максимума, тот и другой существуют. Если, скажем, абсолютный минимум не достигается на концах отрезка,то он расположен внутри отрезка, и значит, он является стационарной точкой. Случай максимума аналогичен. $\square$

Замечание. Если функция удовлетворяет условиям теоремы Ферма и дополнительному условию равенства своих значений на концах отрезка, то внутри отрезка есть стационарная точка (теорема Ролля). Отсюда мгновенно доказывается формула Лагранжа о конечном приращении (которую мы до этого времени оставляли без доказательства): надо рассмотреть функцию $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ и применить к ней теорему Ролля.

Пример 3.2. *Среди прямоугольных треугольников с заданной суммой длин катетов найти треугольник с наибольшей площадью.*

Этим примером Ферма иллюстрировал свой метод поиска экстремумов.

Решение примера. Обозначим сумму длин катетов через a. Тогда, если через x обозначить длину одного из катетов, то задача сведётся к тому, чтобы найти максимум функции $f(x) = \dfrac{x(a-x)}{2}$ на отрезке $[0, a]$. В силу следствия максимум достигается либо на концах отрезка (но там f принимает нулевые значения), либо в стационарной точке $\widehat{x} = \dfrac{a}{2}$, где $f(\widehat{x}) = \dfrac{a^2}{8} > 0$. Следовательно, максимум достигается при $\widehat{x} = \dfrac{a}{2}$. Но тогда $\widehat{x} = a - \widehat{x}$ и значит, решением задачи является равнобедренный прямоугольный треугольник.

Двумерный случай (гладкая задача с ограничением в виде равенства).

Постановка задачи. Рассмотрим задачу: *найти экстремумы функции f_0 двух переменных на кривой, определяемой равенством* $f_1(x_1, x_2) = 0$:

$$f_0(x_1, x_2) \to \mathrm{extr}, \quad f_1(x_1, x_2) = 0. \tag{3_2}$$

Пример 3.3. *Пусть ξ_1 и ξ_2 известные числа. Решить задачу*:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \to \max, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Теорема (правило множителей Лагранжа для задачи (3_2)**)**. *Пусть в задаче* (3_2) *функции f_0 и f_1 определены в некоторой окрестности точки $\widehat{x}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ и строго дифференцируемы в $\widehat{x}$. Тогда если $\widehat{x}$ есть точка локального экстремума задачи, то существует ненулевой вектор $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1)$ такой, что точка $\widehat{x}$ является стационарной точкой функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x)$ (т. е. $\lambda_0 f_0'(\widehat{x}) + \lambda_1 f_1'(\widehat{x}) = 0$); λ_0 и λ_1 называются множителями Лагранжа.*

Решение примера. Функция Лагранжа имеет вид $\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \lambda_0 \langle \xi, x \rangle + \lambda_1(|x|^2 - 1)$. Правило множителей Лагранжа приводит к системе

$$\lambda_0 \xi_1 + 2\lambda_1 x_1 = 0,$$
$$\lambda_0 \xi_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

которая имеет два решения: $\widehat{x}_i = \dfrac{\pm \xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}}$, $i = 1, 2$. Максимум достигается при выборе знаков плюс.

По ходу дела нами было доказано неравенство Коши – Буняковского:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \le \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\,\sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Доказательство правила множителей Лагранжа. Если допустить, что векторы $f_0'(\widehat{x})$ и $f_1'(\widehat{x})$ линейно независимы, то производная отображения $x \mapsto F(x) = \big(f_0(x), f_1(x)\big)$ в точке $\widehat{x}$ является обратимой матрицей, следовательно, удовлетворяет теореме об обратном отображении (условие теоремы удовлетворяется в силу строгой дифференцируемости f_0 и f_1), значит, в любой окрестности точки $\widehat{x}$ при любом малом по модулю действительном α разрешима система уравнений $f_0\big(x(\alpha)\big) = f_0(\widehat{x}) + \alpha$, $f_1\big(x(\alpha)\big) = 0$,

$|x(\alpha)-\widehat{x}| \le C|\alpha|$, где C — положительная константа. Итак, $\widehat{x}$ — не локальный экстремум, значит, векторы $f_0'(\widehat{x})$ и $f_1'(\widehat{x})$ линейно зависимы, что и требовалось. □

Теперь, как и в предыдущих случаях, подымемся на более высокий уровень — попробуем добраться до бесконечности.

Многомерный и бесконечномерный случаи (гладкая задача с ограничением в виде равенств).

Постановка задачи. В конечномерном случае рассматривается задача: *найти экстремумы функции $f_0(x_1,\dots,x_n)$ от n переменных на множестве, определяемом m равенствами $f_1(x_1,\dots,x_n)=\ldots=f_m(x_1,\dots,x_n)=0$.*

Обозначив вектор-столбец $\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big)^T$ через $F(x)$, запишем задачу так:

$$f_0(x)\to \mathrm{extr},\quad F(x)=0,\quad F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m. \tag{3_n}$$

В бесконечномерном случае рассматривается задача: *найти экстремумы функции $f_0(x)$, определённой в области V банахова пространства X на множестве, определяемом равенством $F(x)=0$, где F отображает V в банахово пространство Y.* Она записывается аналогично (3_n), только её следует обозначит (3_∞).

Общая идея того, как решать задачи (3_n), была высказана Ж. Л. Лагранжем [5]:

«*Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется максимум или минимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одним или несколькими уравнениями, нужно прибавить к функции, о которой говорилось, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем максимум или минимум построенной суммы, как если бы переменные были независимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных*».

Вот формулировка теоремы, в которой выражен сформулированный выше принцип Лагранжа:

Теорема (правило множителей Лагранжа для задач (3_n) и (3_∞)). *Пусть в задаче (3_n) функции f_i, $0\le i\le m$, определены и строго дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\widehat{x}\in\mathbb{R}^n$ (в задаче (3_∞) функция f_0 и отображение F определены и строго дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\widehat{x}\in V$), и в задаче (3_n) производная отображения $x\mapsto\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big)$ (в задаче (3_∞) производная отображения F) в точке $\widehat{x}$ сюръективна. Тогда если $\widehat{x}$ есть точка локального экстремума задачи, то существует ненулевой вектор множителей Лагранжа $\overline{\lambda}=(1,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ такой, что точка $\widehat{x}$ является стационарной точкой функции Лагранжа $\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})$; в случае задачи (3_n) $\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})=\sum\limits_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x)$ (т. е. $f_0'(x)+\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i f_i'(\widehat{x})=0$), а в случае задачи (3_∞) $\mathcal{L}(x,\overline{\lambda})=f_0(x)+\langle\lambda,F(x)\rangle$ (т. е. $f_0'(\widehat{x})+(F'(\widehat{x}))^*\lambda=0$), где $\overline{\lambda}=(1,\lambda)$, $\lambda\in Y^*$, а Y^* — пространство, сопряжённое с Y.*

Этот результат для задачи (3_∞) был доказан Л. А. Люстерником (1899–1981) в [6] в 1934 году.

Доказательство этого утверждения проходит по схеме двумерного случая, надо только чуть обобщить теорему об обратном отображении. А именно, имеет место результат, который мы сформулируем сразу в бесконечномерном случае. Но предварительно необходима теорема о правом обратном отображении для линейного отображения: *для линейного непрерывного сюръективного оператора* $A : X \to Y$ *из банахова пространства* X *в банахово пространство* Y *существует правое обратное отображение* $R : Y \to X$*, непрерывное в нуле*: $AR(y) = y$, $|R(y)| \leq C\|y\| \, \forall \, y \in \mathbb{R}^m$.

Теперь можно сформулировать теорему о правом обратном для нелинейного отображения в бесконечномерном случае.

Теорема о правом обратном в бесконечномерном случае. *Пусть* X *и* Y *— банаховы пространства,* V *— окрестность точки* $\widehat{x} \in X$, $F : V \to Y$ *— вообще говоря, нелинейное отображение. Пусть формула*

$$x_k = x_{k-1} + R\big(y - F(x_{k-1})\big), \quad r \in \mathbb{N} \qquad (\mathrm{I}_\infty)$$

определяет решение уравнения $F(x) = y$, $y \in Y$*, модифицированным методом Ньютона. В этой формуле* $R : Y \to X$ *— правый обратный для линейного сюръективного оператора* $A : X \to Y$ *такого, что для чисел* $0 < \theta < 1$ *и* $\delta > 0$ *выполнено неравенство*

$$\|F(x) - F(x') - R(x - x')\|_Y \leq \frac{\theta}{\gamma} \, \|x - x'\|_X \qquad (\mathrm{II}_\infty)$$

для любых x, x'*, для которых* $\|x - \widehat{x}\|_X < \delta$, $\|x' - \widehat{x}\|_X < \delta$*. Тогда для любого вектора* $y \in Y$*, отстоящего по модулю от* $F(\widehat{x})$ *не больше, чем на* $\delta(1-\theta)/|A|$*, последовательность* $\{x_k\}$ *будет стремиться к вектору* $\varphi(y)$*, отстоящему от* $\widehat{x}$ *не больше, чем на* δ*, и такому, что* $F\big(\varphi(y)\big) = y$ *и при этом* $\|\varphi(y) - \widehat{x}\|_X \leq K\|y - F(\widehat{x})\|_Y$*, где* $K = \gamma/(1-\theta)$.

Этот результат 1950 г. принадлежит профессору Чикагского университета Л. Грейвсу (1896–1973) [7].

В конечномерном случае надо положить $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$.

4. Коники и квадрики

Квадрики — это множества уровня квадратичной функции. Плоские квадрики называют кониками (под этим именем они появились у Аполлония), ибо они являются сечениями прямого кругового конуса.

Решать квадратные уравнения учат в школах с давних времён. В школе изучают параболы и гиперболы. А у нас появятся ещё и эллипсы (без них не понять устройство планетных систем). Приведение квадратичных форм к каноническому виду встречается в вузовском образовании на всех этапах — от аналитической геометрии до уравнений с частными производными. Оно входит в базу математической физики и квантовой механики.

Начнём здесь с уровня средней школы.

Одномерный случай.

Постановка задачи. *Требуется описать множество*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + 2bx + c = 0\}. \tag{4_1}$$

Замечание. Обычно в школах квадратное уравнение пишут без двойки во втором члене. Наша запись естественнее, если иметь в виду случай многих переменных.

Теорема 4_1 (о корнях квадратных уравнений). *Квадратное уравнение имеет два корня, один корень или вовсе не имеет корней.*

Стандартное доказательство с помощью выделения полного квадрата мы опускаем.

Двумерный случай.

Здесь будем рассматривать не произвольные функции, а формы.

Постановка задачи. *Требуется описать линии уровня квадратичной формы от двух переменных, т. е. множество*

$$\{(x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + c = 0\}. \tag{4_2}$$

Считая $x = (x_1, x_2)$ вектором евклидовой плоскости со стандартным базисом, квадратичную форму $f(x_1, x_2)$ можно записать в виде $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — симметричная матрица, т. е. $a_{12} = a_{21}$.

Теорема 4_2 (канонический вид квадратичной формы от двух переменных). *Для заданной квадратичной формы $Q(x)$ найдутся два единичных ортогональных вектора f^1 и f^2 и два числа λ_1 и λ_2 такие, что эту форму можно записать в каноническом виде: $Q(x) = \lambda_1\langle f^1, x\rangle^2 + \lambda_2\langle f^2, x\rangle^2$.*

Доказательство (рис. 4). Рассмотрим задачу на максимум при наличии ограничения типа равенства: $f_0(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \to \max$, $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 = 1$, или, в сокращенной форме:

$$\langle Ax, x\rangle \to \max, \quad \langle x, x\rangle = 1.$$

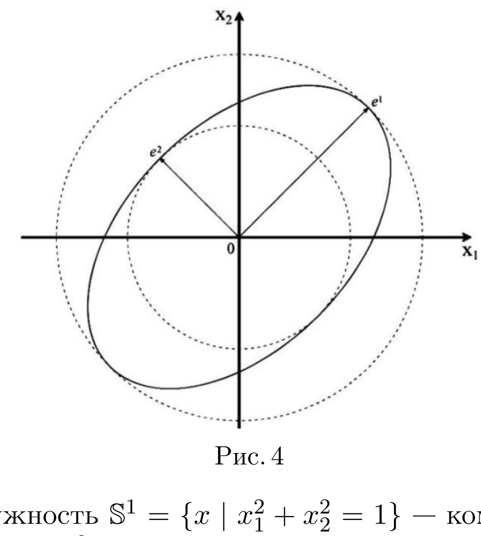

Рис. 4

Единичная окружность $\mathbb{S}^1 = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ — компакт в $\mathbb{E}^2$, функция f_0 непрерывна всюду в $\mathbb{E}^2$, значит, по теореме Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте, решение поставленной задачи существует. Обозначим его f^1. Из правила множителей Лагранжа следует, что найдётся число λ_1, для которого $Af^1 = \lambda_1 f^1$. Пусть f^2 — единичный вектор, ортогональный f^1. Имеем: $\langle f^1, Af^2\rangle = \langle Af^1, f^2\rangle = \lambda_1\langle f^1, f^2\rangle = 0$. Итак, вектор Af^2 ортогонален вектору f^1, как и вектор f^2, следовательно, векторы Af^2 и f^2 пропорциональны: $Af^2 = \lambda_2 f^2$. Разложим вектор x по единичным ортогональным друг другу векторам f^1 и f^2: $x = \langle f^1, x\rangle f^1 + \langle f^2, x\rangle f^2$. Тогда получим: $\langle Ax, x\rangle = = \lambda_1\langle f^1, x\rangle^2 + \lambda_2\langle f^2, x\rangle^2$. $\square$

Замечание. Из доказательства видно, что теорему 4_2 можно переформулировать так: *для любого симметричного оператора A из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A.*

Описания коник в невырожденном случае — когда матрица A обратима — таково: в базисе f_1 и f_2 дело сводится к описанию линий уровня квадратичных форм $Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = c$. Это могут быть эллипсы, гиперболы, пары пересекающиеся прямых, точка и пустое множество.

В вырожденном случае добавляются параболы и пары параллельных прямых, в том числе и слившихся.

Многомерный и бесконечномерный случаи.

Здесь сразу сформулируем теорему о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Имеет место следующий результат:

Теорема 4_3 (Гильберта – Шмидта). *Для любого симметричного оператора A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ (вполне непрерывного симметричного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H) существует ортонормированная система собственных элементов f_k и соответствующих собственных значений λ_k оператора A такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in H$) имеет место равенство $\langle Ax, x\rangle = \sum\limits_k \lambda_k \langle f^k, x\rangle^2$, причём, в зависимости от числа ненулевых собственных элементов оператора A, сумма может быть как конечной, так и бесконечной. Если ненулевых собственных элементов бесконечно много, то $\lambda_k \to 0$.*

Доказательство проходит по схеме двумерного. В конечномерном случае — с индуктивным применением на k-ом шаге правила множителей Лагранжа к задаче $\langle Ax, x\rangle \to \max$, $\langle x, x\rangle = 1$, $\langle x, f_i\rangle = 0$, $1 \le i \le k-1$, где f_i — уже построенная к этому шагу ортонормированная система векторов. В бесконечномерном случае рассматривается та же задача, но не на единичной сфере, а на единичном шаре с использованием слабой компактности шара.

Д. Гильберт (1862–1943) — один из крупнейших математиков XIX–XX вв. — доказал сформулированную теорему 4_3 для интегральных уравнений с симметричным ядром [8], а его ученик Э. Шмидт (1876–1959) придал этому результату абстрактную форму.

Заключение

Вот некоторые исходные пункты, которыми я руководствовался, обдумывая свой «синтетический курс»:

1) *Математику разумно рассматривать в её единстве*. Именно так рассматривали математику крупнейшие математики всех времён.

В подтверждение идеи единства математики я люблю цитировать слова И. М. Гельфанда [9, с. 6]. Мальчиком он просил родителей купить ему книгу по высшей математике. Не сразу (не было средств), но книга (очень заурядный учебник) была куплена. Одна вещь в этой книге потрясла мальчика. Он был уверен, что существуют две математики — алгебра и геометрия, пока не увидел в книге формулу Маклорена. «Математика предстала передо мной, — пишет Гельфанд, — в своём единстве. И с той поры я понял, что разные области математики вместе с математической физикой образуют единое целое».

2) Но раз математика едина, то идеи этого единства разумно внедрять в математическое образование всех уровней.

3) Любое образование, в частности, математическое, должно быть *мотивированным*: про любой значительный раздел, изучаемый в старших классах школы или высшем учебном заведении, учащемуся надо объяснить, для осуществления каких целей этот раздел появился на свет, и почему знание его важно для личности.

Апология математики, может быть, в самом существенном, состоит в том, что математика является языком естествознания и рабочим инструментом техники, управления и экономики, а сам стиль математического мышления способен одарить личность бесценным даром интеллектуальной свободы. Всё это разумно постоянно демонстрировать, чтобы показывать осмысленность овладения математическими знаниями.

4) Важнейшие математические идеи и принципы *общечеловечны*, а фундаментальные результаты, из которых составляется база математического образования даже на университетском уровне, в сущности, *просты* и допускают содержательное толкование на уровне, доступном интересующемуся школьнику.

«Синтетический курс» позволяет обозреть мехматское университетское образование (по крайней мере, значительную часть того, что включается в финальный экзамен) с той небольшой высоты, на которую мы поднялись в этом курсе. Коротко скажем об этом.

Содержание курса **Аналитическая геометрия** складывается из геометрической интерпретации теории линейных уравнений и квадрик на плоскости и в трёхмерном пространстве. Основные результаты этого курса являются следствиями двумерного и трёхмерного вариантов теорем Фредгольма и Гильберта – Шмидта.

Курс **Линейная алгебра** в основной своей части состоит из теорий линейных уравнений и квадратичных форм в конечномерных пространствах. В программу Госэкзамена включены следующие теоремы: *о ранге матрицы*; *теорема Кронекера – Капелли*; о *приведении к нормальному виду*; *о приведении квадратичной формы к главным осям*.

Последний результат есть не что иное, как конечномерный вариант теоремы Гильберта – Шмидта. Приведение к нормальному виду происходит после приведения к главным осям с помощью гомотетий (замены переменных вида $y_i = \alpha_i x_i$). Теорема Кронекера – Капелли является автоматическим следствием теоремы о ранге, которую с помощью конечномерного варианта теоремы Фредгольма можно доказать прямо, без теории определителей.

В курсе **Математический анализ** студент осваивает очень большое число фундаментальных понятий из общей топологии и дифференциального и интегрального исчислений, но по сути дела там имеются две фундаментальных серии результатов: разного рода теоремы обратимости (о которых в этой статье оказалось возможным сказать достаточно подробно) и теорема Пуанкаре (которую иногда называют теоремой Ньютона – Лейбница – Грина – Гаусса – Остроградского – Стокса – Пуанкаре) о связи дифференцирования и интегрирования, которая, к сожалению, оказалась за пределами наших возможностей.

В программу Госэкзамена по курсу **Обыкновенные дифференциальные уравнения** включены, по сути дела, лишь два результата: теоремы существования локального решения задачи Коши в нелинейном случае и глобального решения для линейных систем. Первый результат доказывается прямым применением теоремы Грейвса. Теорема существования и единственности для общих линейных уравнений (а не только для уравнений второго порядка, как это требует программа Госэкзамена) легко редуцируется к доказанной локальной теореме.

Основная теорема курса **Теория функций комплексного переменного** — это, несомненно, *теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру*. Она доказывается сочетанием условий Коши – Римана с формулой Грина, а условия Коши – Римана — это не что иное, как расшифровка определения производной функции комплексного переменного.

Помимо определений в вопросах Госэкзамена по курсу **Дифференциальная геометрия** есть два результата: *Теорема Менье* и *Формула Эйлера*.

Если к поверхности, расположенной в $\mathbb{E}^3$, провести касательную плоскость в некоторой точке A и затем совершить ортогональное преобразование, переводящее касательную плоскость в плоскость Ox_1x_2, а точку A в начало координат, то поверхность будет представляться функцией $f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + o(|x|)$ и всё сводится к исследованию квадратичной формы от двух переменных. «Главные оси» формы определяют «главные направления» поверхности, кривизны соответствующих парабол — главные кривизны поверхности, и остаётся разобраться с кривизнами сечений поверхностей второго порядка.

Выше говорилось о единстве математики и математического естествознания. Галилею (1564–1642) принадлежат слова: «*Книга Природы написана на языке математики*». В «синтетический курс» включено достаточно много, чтобы можно было начать читать книгу Природы.

Об одной особенности законов, записанных в Книге Природы, Эйлер (1707–1783) сказал так: «*В мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума*». Эту мысль иногда формулируют следующим образом: *законы природы в значительной своей доле описываются экстремальными принципами*. Изложенного нами по теории экстремума достаточно, чтобы даже на школьном уровне вывести закон преломления света при переходе из одной однородной среды в другую, который был экспериментально установлен Снеллиусом (1580–1626). Для этого достаточно применить условие минимума в простой в задаче $f(x) = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+(l-x)^2}}{v_2} \to \min$, которая формализует первый экстремальный принцип в естествознании, открытый Ферма (1601–1665) в 1662 г. (согласно этому принципу *свет, распространяющийся в неоднородной среде, избирает путь, при котором затрачивается наименьшее время*; в поставленной задаче свет идёт из точки $(0,a)$ в верхней полуплоскости, где скорость его распространения равна v_1, в точку $(l,-b)$ в нижней полуплоскости, где скорость v_2).

В 1687 году вышла книга Ньютона «Математические начала натуральной философии» — величайшая в истории науки. В ней содержится целый свод законов природы, связанных единой концепцией. Размышляя над проблемами школьного математического образования, А. Н. Колмогоров писал: «*Вряд ли нужно доказывать, насколько желательно с общеобразовательной точки зрения достигнуть того, чтобы все учащиеся могли вполне конкретно понять хотя бы ньютонову концепцию математического естествознания*».

В применении к законам динамики ньютонову концепцию математического естествознания можно кратко выразить словами: *законы динамики описываются дифференциальными уравнениями*. Всё это мотивирует изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений и методов их решения.

А вообще, большинство законов динамики выводятся из *принципа Гамильтона*, согласно которому каждая динамическая система характеризуется функцией $L = L(t,x,\dot{x})$, где $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, называемой *лагранжианом*. Функционал

$$S\big(x(t)\big) = \int_{t_0}^{t_1} L\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)\, dt$$

называют *действием*. Принцип Гамильтона состоит в том, что, подобно тому, как это было у Ферма со светом, движение системы от точки (t_0, x_0) до достаточно близкой точки (t_1, x_1) происходит по траектории, обеспечивающей наименьшее значение действия, т. е., в частности, удовлетворяется *уравнение Эйлера*: $-\dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0$ (это — аналог теоремы Ферма для задачи минимизации функционала S). Если применить уравнение Эйлера к задаче о движении спутника вокруг центрального тела, где сила взаимодействия между телами удовлетворяет закону обратных квадратов, получаются (это уже институтский уровень) интегрируемые дифференциальные уравнения. Интегрирование их приводит к трём законам Кеплера, что явилось одним из величайших триумфов ньютоновой науки.

Основные задачи математической физики, изучаемые в курсе дифференциальных уравнений с частными производными, решаются методом Фурье, редуцирующим задачи математической физики к теореме Гильберта–Шмидта. Методом Фурье решаются и классические задачи квантовой механики.

Вернёмся к началу. В тридцатые годы была осуществлена реформа математического образования. А год назад у нас была обнародована новая концепция математического образования. Не обсуждая её подробно, обратим внимание на некоторые аспекты проблемы математического образования в наше время.

Образование имеет три адреса — личность, государство и человечество. В цивилизованном обществе целью государства должна быть личность, но, разумеется, государство должно предусмотреть и свои интересы, состоящие в том, чтобы в стране было нужное число квалифицированных инженеров, экономистов, управленцев, врачей и учёных, получивших достаточное для их созидательной деятельности математическое образование.

Изменения в мире, в частности, ментальности молодёжи, произошедшие за последние годы, не оставляют надежд на то, что всех учащихся можно чему-то серьёзному в математике обучить, да и государство (повторюсь, цивилизованное государство) по разным причинам может не иметь возможности бесплатно дать каждому такое образование, которое он желает получить.

Это означает, что математическое образование (не только у нас — всюду) должно быть двухуровневым — быть может, до лучших времён: не будем терять надежду, что, как в это верил А. Н. Колмогоров, все учащиеся захотят ознакомиться хотя бы с ньютоновской концепцией естествознания, но сейчас это совершенная утопия. Я предлагаю выделять людей, *заинтересованных в получении образования повышенного уровня*. Похоже, что таковых 10–15 процентов от всех учащихся любого уровня (школьного, институтского, университетского). Им надо предоставить возможность получить образование, соответствующее их интересам, поддерживая, быть может, средствами, которые они должны будут вернуть в будущем, как это делается во многих странах (возможны и другие пути поддержки творческих людей).

Формы двух уровней преподавания во многом уже обозначены: это специальные математические и естественно-научные школы, бакалавриат и магистратура в институтах и университетах.

Базовое образование в школе, институте, университете у нас может остаться тем, что было, как говорится, «при старом режиме». Успехи нашего математического образования в прошлые времена должны, мне кажется, предостеречь от того, чтобы всё перестраивать бездумно. Но неизбежны и некоторые изменения. Спецшколы и институтские магистратуры должны иметь программы повышенной подготовки. Для их разработки стоит использовать опыт мехмата, о котором говорилось вначале. А университетское образование второго уровня разумно (с моей точки зрения) сделать вариативным. Чтобы каждый человек — при помощи факультета, кафедр, научных руководителей, посторонних советчиков — мог сам выбрать свою образовательную стезю.

И между двумя стадиями обучения я бы предложил организовывать и в школе, и в ВУЗах специальные курсы в духе того «Синтетического курса», что изложен в этой статье, чтобы человек мог получить впечатление о математике как о единой структуре.

В своей статье я старался представить математику не как федеративное, а как единое государство. В этом государстве расположены несколько (не много) особо значимых мест (назовём их *вершинами*). Я выбрал четыре. Для того, чтобы достичь их (читатель, мне кажется, должен с этим согласиться), не пришлось «не страшась усталости карабкаться по каменистым тропам». К высоким целям нашлись плавные и естественные пути от самых истоков знания (папируса Райнда, алгоритма Герона, ньютоновского определения скорости, письма Ферма, решения квадратного уравнения) до теорем Фредгольма, Грейвса, Люстерника и Гильберта – Шмидта.

По отношению к устройству мира, который я старался раскрыть перед читателем — мира математического образования, — мне представляется возможным привести слова, приписываемые Эйнштейну: «Мир устроен просто. Очень просто. Но не более того». И чтобы войти в этот мир, не обязательно обладать «талантом» (что это такое определить нелегко), а достаточно, чтобы человек был *интересующимся*, и чтобы обстоятельства судьбы не отбили у него желания смотреть на себя как на мыслящее существо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Избранное-60. — М.: Фазис, 1997.
2. Fredholm E. I. Sur une classe d'equations fonctionnelles // Acta Mathematica. 1903. № 27. P. 365–390.
3. Ньютои И. Математические работы, URSS, 2012.
4. Ферма П. Метод отыскания наибольших и наименьших значений. В кн.: Декарт. Геометрия. — М. – Л.: Техтеорлит, 1938.
5. Lagrange J.-L. Théorie des fonctions analytiques. — Paris, 1797.
6. Люстерник Л. А. Об условных экстремумах функционалов // Матем. сб. 1934. Т. 41. № 3. С. 390–401.
7. Graves L. M. Duke Math. J. 1950. V. 17. P. 111–114.
8. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralglelchungen. — Leipzig und Berlin, 1912.
9. Интервью с академиком И. М. Гельфандом // Квант. 1989. № 1. С. XXX

Поступила 20.05.2014

SYNTHETICAL COURSE OF MATHEMATICS

V. M. Tikhomirov

The article is devoted to problems of modern mathematical education. It contains a sketch of «Synthetical course of mathematics» in which mathematics is considered as a unifies science.

Keywords: Fredholm's alternative, Newton's method, Lagrange's principle, Hilbert – Schmidt theorem